MATHEMATICS Proceedings A 89 (2), June 23, 1986

Sur le classifiant du groupoïde d'holonomie et sur le groupoïde fondamental d'un feuilletage

par Paul Ver Eecke

Université de Picardie, U.E.R. de Mathématiques, 33, rue St. Leu, 80039 Amiens Cedex, France

Communicated by Prof. W.T. van Est at the meeting of November 25, 1985

RÉSUMÉ

Dans un article [11] préliminaire à celui-ci, l'auteur a défini géométriquement le groupoïde fondamental $\pi(\mathscr{F})$ d'un feuilletage $\mathscr{F}$ sur une variété V. Le groupe structural de $\pi(\mathscr{F})$ est le groupe fondamental abstrait, au sens de van Est [8], du schéma de variété associé à $\mathscr{F}$. Le présent article a pour objet essentiel de démontrer en détail le résultat, déjà annoncé succinctement [12], sur la construction d'un isomorphisme canonique de $\pi(\mathscr{F})$ avec un sous-groupoïde plein du groupoïde de Poincaré $\pi(B\mathscr{G})$ du classifiant $B\mathscr{G}$ du groupoïde d'holonomie $\mathscr{G}$ de $\mathscr{F}$.

Ce travail a été suscité par une affirmation incidente de van Est [8] sur l'identité abstraite entre le groupe fondamental d'un schéma de variété (P, T) et le groupe de Poincaré du classifiant BT du groupoïde topologique T.

1. SUBMERSIONS TOPOLOGIQUES

1.1. On dira qu'une application d'espaces topologiques $f: V \to W$ est une submersion [4] si f est ouverte et qu'il existe, pour tout $x \in V$, un triplet (U, g, F), où U est un voisinage ouvert de x, où F est un espace topologique et où l'application $g: U \to F$ est telle que $(f, g): U \to f(U) \times F$ soit un homéomorphisme. On dira que cet homéomorphisme est la carte locale définie par (U, g, F) et de domaine U. On appellera ouvert élémentaire de V relatif à la submersion f tout domaine d'une carte locale. On dira que les $f^{-1}(y)$, $y \in f(V)$, sont les fibres de f. Une submersion est évidemment continue. On appellera surmersion une submersion surjective. Une submersion de variétés est évidemment une submersion des espaces topologiques sous-jacents.

Etant donnée une application f d'un espace topologique V dans un ensemble

W, on écrira $\omega \underset{f}{\sim} \omega'$ (ou, plus simplement, sauf risque de confusions, $\omega \sim \omega'$) pour désigner la relation d'équivalence dans $\pi_{x_0 x}(V)$, où $x_0, x \in V$, définie comme suit: il existe $x_i \in V$, $\omega_i \in \pi_{x_{i-1} x_i}(V)$, $i = 1, \dots, n$, avec $x_n = x$, et $\delta_i \in \pi_{x_i}(f^{-1}(f(x_i)))$, $i = 0, \dots, n$, tels que l'on ait $\omega = \omega_1 \cdots \omega_n$ et $\omega' = \bar{\delta}_0 \omega_1 \bar{\delta}_1 \cdots \cdots \bar{\delta}_{n-1} \omega_n \bar{\delta}_n$ dans le groupoïde fondamental $\pi(V)$. Pour un sous-espace non vide A de V, on désigne par $\eta \to \bar{\eta}$ le foncteur $\pi(A) \to \pi(V)$ induit par l'injection canonique $A \to V$. Cette relation est compatible avec la loi de composition du groupoïde $\pi(V)$; $\omega \sim \omega'$ dans $\pi_{x_0 x_1}(V)$ et $\omega_1 \sim \omega_1'$ dans $\pi_{x_1 x_2}(V)$ entrainent $\omega\omega_1 \sim \omega'\omega_1'$. L'énoncé suivant résulte immédiatement du "lemme du rectangle" [14].

LEMME. *Soit $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ un chemin de l'espace topologique produit $V_1 \times V_2$ défini dans $[a, b]$. On a alors*

$$[(\gamma_1, \widehat{\gamma_2(a)})][(\widehat{\gamma_1(b)}, \gamma_2)] = [\gamma] = [(\widehat{\gamma_1(a)}, \gamma_2)][(\gamma_1, \widehat{\gamma_2(b)})]$$

dans $\pi_{\gamma(a)\gamma(b)}(V_1 \times V_2)$, où $\hat{x}$ désigne le lacet constant en x.

PROPOSITION. *Soit $f: V \to W$ une submersion topologique à fibres connexes. On suppose aussi que V est localement connexe par arc. Si les chemins γ et γ' de V, définis dans $[a, b]$, vérifient $f \circ \gamma = f \circ \gamma'$, alors on a*

$$(1) \qquad \bar{\omega}[\gamma'] \underset{f}{\sim} [\gamma]\bar{\omega}'$$

quels que soient $\omega \in \pi_{\gamma(a)\gamma'(a)}(f^{-1}(y_0))$, $\omega' \in \pi_{\gamma(b)\gamma'(b)}(f^{-1}(y))$, où $y_0 = f(\gamma(a))$, $y = f(\gamma(b))$.

Supposons d'abord qu'on ait $\omega = [\delta]$, $\omega' = [\delta']$, où δ, δ' sont définis dans $[a, b]$ et tels que γ, γ', δ et δ' prennent leurs valeurs dans un ouvert élémentaire, ce qui revient à démontrer (1) dans le cas particulier où $V = W \times F$ et $f = pr_1$. On a alors un chemin γ_1 de W et des chemins γ_2, γ_2', ε, ε' de F, tous définis dans $[a, b]$ par $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\gamma' = (\gamma_1, \gamma_2')$, $\delta = (\widehat{\gamma_1(a)}, \varepsilon)$, $\delta' = (\widehat{\gamma_1(b)}, \varepsilon')$. D'après le lemme, on a $[\gamma] = [(\gamma_1, \widehat{\gamma_2(a)})][(\widehat{\gamma_1(b)}, \gamma_2)]$ et $[\gamma'] = [(\gamma_1, \widehat{\gamma_2'(a)})][(\widehat{\gamma_1(b)}, \gamma_2')]$. D'autre part, on a $[(\widehat{\gamma_1(b)}, \gamma_2)][(\widehat{\gamma_1(b)}, \varepsilon')][(\widehat{\gamma_1(b)}, \gamma_2')]^{-1} = \bar{\omega}''$, où

$$\omega'' \in \pi_{(\gamma_1(b), \gamma_2(a))(\gamma_1(b), \gamma_2'(a))}(f^{-1}(y))$$

est l'image de $[\gamma_2][\varepsilon'][\gamma_2']^{-1}$ par le foncteur $\pi(F) \to \pi(W \times F)$ induit de $z \to (\gamma_1(b), z)$. Donc (1) équivaut à la relation évidente $[(\widehat{\gamma_1(a)}, \varepsilon)][(\gamma_1, \widehat{\gamma_2'(a)})] \sim \sim [(\gamma_1, \widehat{\gamma_2(a)})]\bar{\omega}''$.

Dans le cas général, il suffit d'indiquer $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ tels que l'énoncé soit vérifié pour $\gamma_i = \gamma_{|[t_i, t_{i+1}]}$ et $\gamma_i' = \gamma'_{|[t_i, t_{i+1}]}$, $i = 0, \dots, n-1$. En effet, les fibres de $f: V \to W$ étant connexes par arc, il existe $\omega_i \in \pi_{\gamma(t_i)\gamma'(t_i)}(f^{-1}(y_i))$, $i = 1, \dots, n$, avec $\omega_n = \omega'$ et $y_i = f(\gamma(t_i))$, et on aura alors $\bar{\omega}_i[\gamma_i'] \sim [\gamma_i]\bar{\omega}_{i+1}$, avec $\omega_0 = \omega$, d'où (1). En fait, on est ramené, pour tout $c \in [a, b]$, à indiquer un intervalle compact J, voisinage de c dans $[a, b]$, tel que l'énoncé soit vérifié pour $\gamma_{|J}$ et $\gamma'_{|J}$. Or soit $\eta: [0, 1] \to f^{-1}(z_0)$, où $z_0 = f(\gamma(c))$, un chemin d'origine

$\gamma(c)$ et d'extrémité $\gamma'(c)$. Il existe $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$ et des ouverts élémentaires connexes par arc $U_i\supset\eta([t_{i-1},t_i])$, $i=1,\ldots,n$. On a aussi un ouvert $W_0\ni z_0$ et, pour $i=1,\ldots,n-1$, une section (supposée toujours continue) $\sigma_i: W_0\to V$ de f telle que $\sigma_i(z_0)=\eta(t_i)$. Soit alors $J=[c',c'']$ un voisinage de c dans $[a,b]$ tel que $(f\circ\gamma)(J)\subset W_0$, $\gamma(J)\subset U_1$, $(\sigma_i\circ f\circ\gamma)(J)\subset U_i\cap U_{i+1}$ pour $i=1,\ldots,n-1$, et $\gamma'(J)\subset U_n$. Pour $i=1,\ldots,n$, soit $\zeta_i\in\pi_{\gamma_{i-1}(c')\gamma_i(c')}(f_i^{-1}(y))$, $\zeta_i'\in\pi_{\gamma_{i-1}(c'')\gamma_i(c'')}(f_i^{-1}(z))$, où $y=f(\gamma(c'))$, $z=f(\gamma(c''))$, $\gamma_0=\gamma_{|J}$, $\gamma_i=\sigma_i\circ f\circ\gamma_{|J}$ pour $i=1,\ldots,n-1$, $\gamma_n=\gamma'_{|J}$ et où $f_i: U_i\to f(U_i)$ est induite par f. On peut supposer $\omega=\zeta_1\cdots\zeta_n$ et $\omega'=\zeta_1'\cdots\zeta_n'$ dans (1), qui résulte alors des relations $\overline{\zeta}_i[\gamma_i]\underset{f_i}{\sim}[\gamma_{i-1}]\overline{\zeta_i'}$ dans $\pi_{\gamma_{i-1}(c')\gamma_i(c'')}(U_i)$, $i=1,\ldots,n$, vérifiées d'après ce qui précède.

1.2. Etant donnée une application continue d'espaces topologiques $f: V\to W$, on dira que $\omega\in\pi_{x_0x}(V)$ est un relèvement du chemin $\gamma:[a,b]\to W$ si on a $f(x_0)=\gamma(a)$ et qu'il existe $a=t_0<t_1\cdots<t_n=b$, des chemins $\gamma_i:[t_i,t_{i+1}]\to V$, $i=0,\ldots,n-1$, vérifiant $f\circ\gamma_i=\gamma_{|[t_i,t_{i+1}]}$, et enfin $\delta_0\in\pi_{x_0\gamma_0(a)}(f^{-1}(y_0))$, $\delta_i\in\pi_{\gamma_{i-1}(t_i)\gamma_i(t_i)}(f^{-1}(y_i))$, $i=1,\ldots,n-1$, $\delta_n\in\pi_{\gamma_{n-1}(b)x}(f^{-1}(y_n))$, où $y_i=\gamma(t_i)$, tels que $\omega=\overline{\delta}_0[\gamma_0]\overline{\delta}_1\cdots\overline{\delta}_{n-1}[\gamma_{n-1}]\overline{\delta}_n$. On dira alors que ω est un relèvement de γ relativement à la subdivision $t_0<t_1\cdots<t_n$ de $[a,b]$. Il est clair que ω est aussi un relèvement relativement à toute subdivision plus fine de $[a,b]$. Si $f_*:\pi(V)\to\pi(W)$ désigne le foncteur induit par f, on a $f_*(\omega)=[\gamma]$.

PROPOSITION. *Soit $f: V\to W$ une surmersion d'espaces topologiques à fibres connexes. On suppose que V est localement connexe par arc. Quels que soient x_0, $x\in V$ et le chemin $\gamma:[a,b]\to V$, avec $f(x_0)=\gamma(a)$, $f(x)=\gamma(b)$, il existe un relèvement $\omega\in\pi_{x_0x}(V)$ de γ et si ω, $\omega'\in\pi_{x_0x}(V)$ sont des relèvements de γ, alors on a $\omega\underset{f}{\sim}\omega'$.*

Il existe, en effet, $a=t_0<t_1\cdots<t_n=b$ et des sections σ_i de f, définies dans des ouverts $W_i\supset\gamma([t_i,t_{i+1}])$, $i=0,\ldots,n-1$. Il est clair que $\overline{\delta}_0[\sigma_0\circ\gamma_0]\overline{\delta}_1\cdots$ $\cdots\overline{\delta}_{n-1}[\sigma_{n-1}\circ\gamma_{n-1}]\overline{\delta}_n\in\pi_{x_0x}(V)$ est un relèvement de γ, avec $\gamma_i=\gamma_{|[t_i,t_{i+1}]}$, $\delta_0\in\pi_{x_0\sigma_0(y_0)}(f^{-1}(y_0))$, $\delta_i\in\pi_{\sigma_{i-1}(y_i)\sigma_i(y_i)}(f^{-1}(y_i))$ pour $i=1,\ldots,n-1$, et $\delta_n\in\pi_{\sigma_{n-1}(y_n)x}(f^{-1}(y_n))$; on a posé $y_i=\gamma(t_i)$.

Etant donnés des relèvements ω, $\omega'\in\pi_{x_0x}(V)$ de γ, et qu'on peut supposer relatifs à une même subdivision $a=t_0<t_1\cdots<t_n=b$, on a, avec les notations ci-dessus,

$$(1)\qquad\left\{\begin{array}{l}\omega=\overline{\delta}_0[\gamma_0]\overline{\delta}_1\cdots\overline{\delta}_{n-1}[\gamma_{n-1}]\overline{\delta}_n\\ \omega'=\overline{\delta}_0'[\gamma_0']\overline{\delta}_1'\cdots\overline{\delta}_{n-1}'[\gamma_{n-1}']\overline{\delta}_n'\end{array}\right.$$

Pour $i=0,\ldots,n-1$, soient alors

$$\varepsilon_i\in\pi_{\gamma_i(t_i)\gamma_i'(t_i)}(f^{-1}(y_i))\text{ et }\eta_i\in\pi_{\gamma_i(t_{i+1})\gamma_i'(t_{i+1})}(f^{-1}(y_{i+1})),$$

où $y_i=\gamma(t_i)$. D'après la proposition de (1.1.), on a $\overline{\varepsilon}_i[\gamma_i']\underset{f}{\sim}[\gamma_i]\overline{\eta}_i$ pour $i=0,\ldots,n-1$ et, en conséquence immédiate de la définition même de $\sim$, on a aussi $\delta_0\varepsilon_0 \sim \delta'_0$, $\eta_{i-1}\delta'_i \sim \delta_i\varepsilon_i$ pour $i=1,\ldots,n-1$, et $\delta_n\eta_{n-1} \sim \delta'_n$. Compte tenu de (1), ces relations entraînent $\omega \sim \omega'$.

COROLLAIRE. *Sous les hypothèses de la proposition précédente, $f_*: \pi(V) \to \pi(W)$ est un foncteur plein et V est connexe par arc si et seulement si W est connexe par arc.*

1.3. On dira que deux chemins $\gamma: [a,b] \to W$ et $\gamma': [a,b] \to W$ sont strictement homotopes relativement à une application continue $f: V \to W$ d'espaces topologiques s'il existe une homotopie $h: [a,b] \times [0,1] \to W$ de γ à γ', une subdivision $a=t_0<t_1< \cdots <t_n=b$ et des ouverts $U_i \supset h([t_i,t_{i+1}] \times [0,1])$, $i=0,\ldots,n-1$, sur lesquels sont définies des sections de f. La remarque suivante est presque évidente.

REMARQUE. [11]. *Si $f: V \to W$ est une surmersion d'espaces topologiques et si les chemins $\gamma_0: [a,b] \to W$ et $\gamma: [a,b] \to W$ sont homotopes, alors il existe des chemins $\gamma_i: [a,b] \to W$, $i=1,\ldots,n$, avec $\gamma_n=\gamma$, tels que, pour $i=0,\ldots,n-1$, γ_i et γ_{i+1} soient strictement homotopes relativement à f.*

On peut alors caractériser comme suit le noyau de $f_*: \pi(V) \to \pi(W)$ induit par une surmersion topologique $f: V \to W$.

PROPOSITION. *Soit $f: V \to W$ une surmersion d'espaces topologiques à fibres connexes. On suppose que V est localement connexe par arc. Pour ω, $\omega' \in \pi_{x_0x}(V)$, on a alors*

(1) $\qquad f_*(\omega)=f_*(\omega')$

dans $\pi_{f(x_0)f(x)}(W)$ si et seulement si $\omega \underset{f}{\sim} \omega'$.

Vérifions d'abord que la condition est suffisante. Il existe alors par hypothèse $x_i \in V$ et $\omega_i \in \pi_{x_{i-1}x_i}(V)$, $i=1,\ldots,n$, avec $x_n=x$, et $\delta_i \in \pi_{x_i}(f^{-1}(y_i))$, $i=0,\ldots,n$, où $y_i=f(x_i)$, tels qu'on ait $\omega=\omega_1\cdots\omega_n$ et $\omega'=\delta_0\omega_1\delta_1\cdots\delta_{n-1}\omega_n\delta_n$. Puisque δ_i appartient au noyau de l'homomorphisme $f_*: \pi_{x_i}(V) \to \pi_{y_i}(W)$, $i=0,\ldots,n$, on a donc (1).

Montrons maintenant que la condition est nécessaire. Soient $\gamma: [a,b] \to W$ et $\gamma': [a,b] \to W$ des chemins tels que $\omega=[\gamma]$, $\omega'=[\gamma']$. Par hypothèse, $f\circ\gamma$ et $f\circ\gamma'$ sont homotopes et, d'après la remarque précédente, il existe des chemins $\eta_i: [a,b] \to W$, $i=0,\ldots,n$, avec $\eta_0=f\circ\gamma$, $\eta_n=f\circ\gamma'$ tels que η_i et η_{i+1}, $i=0,\ldots,n-1$, soient strictement homotopes relativement à f. D'après la proposition de (1.2.), chaque η_i, $i=0,\ldots,n$, admet un relèvement $\omega_i \in \pi_{x_0x}(V)$ relatif à f, et on peut évidemment poser $\omega_0=\omega$, $\omega_n=\omega'$. Il s'agit alors de vérifier qu'on a $\omega_0 \underset{f}{\sim} \omega_1 \underset{f}{\sim} \cdots \omega_{n-1} \underset{f}{\sim} \omega_n$, ce qui revient à démontrer l'énoncé dans le cas particulier où ω, ω' relèvent respectivement des chemins $\zeta: [a,b] \to W$, $\zeta': [a,b] \to W$ strictement homotopes relativement à f. Or, on a alors une homotopie $h: [a,b] \times [0,1] \to W$ de ζ à ζ', une subdivision $a=t_0<$

$<t_1<\cdots<t_n=b$ et des ouverts $U_i\supset h([t_i,t_{i+1}]\times[0,1])$, $i=0,\ldots,n-1$, sur lesquels sont définies des sections σ_i de f. Posant $\zeta_i=\zeta_{|[t_i,t_{i+1}]}$, $\zeta_i'=\zeta'_{|[t_i,t_{i+1}]}$ pour $i=0,\ldots,n-1$, on obtient alors, comme dans la démonstration de la proposition de (1.2.), des relèvements $\tilde\omega$, $\tilde\omega'\in\pi_{x_0x}(V)$ de ζ, ζ' de la forme

$$(2)\qquad \begin{cases} \tilde\omega=\bar\delta_0[\sigma_0\circ\zeta_0]\bar\delta_1\cdots\bar\delta_{n-1}[\sigma_{n-1}\circ\zeta_{n-1}]\bar\delta_n \\ \tilde\omega'=\bar\delta_0'[\sigma_0\circ\zeta_0']\bar\delta_1'\cdots\bar\delta_{n-1}'[\sigma_{n-1}\circ\zeta_{n-1}']\bar\delta_n' \end{cases}$$

et qui, d'après la même proposition, vérifient donc $\tilde\omega\underset{f}{\sim}\omega$, $\tilde\omega'\underset{f}{\sim}\omega'$. Il n'est donc que de démontrer

$$(3)\qquad \tilde\omega\underset{f}{\sim}\tilde\omega'$$

Pour $i=1,\ldots,n-1$, le chemin $\varepsilon_i:[0,1]\to U_{i-1}\cap U_i$ défini par $\varepsilon_i(\tau)=h(t_i,\tau)$ vérifie, d'après la proposition de (1.1.),

$$(4)\qquad [\sigma_{i-1}\circ\varepsilon_i][\bar\delta_i']\underset{f}{\sim}[\bar\delta_i][\sigma_i\circ\varepsilon_i]$$

D'autre part, le lemme du rectangle [14], appliqué à chaque $\sigma_i\circ h:[t_i,t_{i+1}]\times\times[0,1]\to V$, $i=0,\ldots,n-1$, entraîne $[\sigma_0\circ\zeta_0][\sigma_0\circ\varepsilon_0]=[\sigma_0\circ\zeta_0']$, $[\sigma_i\circ\varepsilon_i][\sigma_i\circ\zeta_i']==[\sigma_i\circ\zeta_i][\sigma_i\circ\zeta_{i+1}]$ pour $i=1,\ldots,n-2$, et $[\sigma_{n-1}\circ\varepsilon_{n-1}][\sigma_{n-1}\circ\zeta_{n-1}']=[\sigma_{n-1}\circ\zeta_{n-1}]$. Compte tenu de (2) et de (4), on obtient alors (3).

2. LE CLASSIFIANT D'UN GROUPOÏDE TOPOLOGIQUE

2.1. Etant donnés une famille de parties $(A_i)_{i\in I}$ d'un ensemble X, des espaces topologiques Y_i, et, pour chaque $i\in I$, une application $f_i:A_i\to Y_i$, on appellera topologie initiale sur X relative aux f_i, $i\in I$, celle engendrée par $\bigcup_{i\in I}f_i^{-1}(\mathscr{U}_i)$ où $\mathscr{U}_i$ est l'ensemble des ouverts de Y_i. Les A_i, $i\in I$, sont évidemment des ouverts de cette topologie et une application g d'un espace topologique Z dans X est continue si et seulement si $g^{-1}(A_i)\neq\emptyset$ entraîne que $g^{-1}(A_i)$ est ouvert et $f_i\circ g/g^{-1}(A_i)$ continue.

Etant donné un groupoïde topologique Γ sur V, c'est-à-dire dont V est le sous-espace des unités, on désignera par α et β les rétractions source et but de Γ sur V. Le composé fg de $f,g\in\Gamma$ est donc défini si et seulement si $\beta(f)=\alpha(g)$. Soit $P\Gamma$ le sous-ensemble de $([0,1]\times\Gamma)^N$ formé des $(t,g)=((t_0,g_0),(t_1,g_1),\ldots)$ tels que les t_n soient nuls sauf un nombre fini d'entre eux avec $\Sigma\, t_n=1$ et tels que $\beta(g_n)$ soit indépendant de n. On désigne classiquement [1] par $E\Gamma$ le quotient de $P\Gamma$ par la relation d'équivalence suivante: $(t,g)\sim(t',g')$ si $t_n=t_n'$ pour tout $n\in N$, avec $g_n=g_n'$ pour $t_n\neq0$. On désignera par $[t,g]$ la classe d'équivalence de (t,g). Pour tout $n\in N$, on a alors une application $p_n:E\Gamma\to[0,1]$ définie par $p_n([t,g])=t_n$, et $q_n:p_n^{-1}\ (]0,1])\to\Gamma$ définie par $q_n([t,g])=g_n$. La topologie classiquement [1] considérée sur $E\Gamma$ est la topologie initiale relative aux p_n et aux q_n, $n\in N$. On a une application continue $\bar\beta:E\Gamma\to V$ définie en posant que $\bar\beta([t,g])$ est la valeur commune des $\beta(g_n)$. On a alors aussi une application continue $([t,g],\gamma)\to[t,g]\gamma$ définie par $[t,g]\gamma=[(t_0,g_0\gamma),(t_1,g_1\gamma),\ldots]$ dans le produit fibré $E\Gamma\times_V\Gamma$ de $\bar\beta$ et de $\alpha:\Gamma\to V$ et à valeurs dans $E\Gamma$. On appelle classifiant [1] de Γ l'espace quotient $B\Gamma$ de $E\Gamma$ par l'action à droite simplement transitive de Γ sur $E\Gamma$, définie ci-dessus. Soit $q:E\Gamma\to B\Gamma$ l'application canonique. Le lemme suivant est élémentaire.

LEMME. *Soient $f:X\to Y$ une submersion d'espaces topologiques et $g:Z\to Y$ une application continue. Alors $pr_2:X\times_Y Z\to Z$, où $X\times_Y Z$ est le produit fibré de f et g, est une submersion.*

PROPOSITION. *Si l'application source $\alpha:\Gamma\to V$ d'un groupoïde topologique Γ est une submersion alors $q:E\Gamma\to B\Gamma$ est une submersion.*

Les ouverts $Y_n=p_n^{-1}(]0,1])$, $n\in N$, saturés pour l'action de Γ sur $E\Gamma$, recouvrent $E\Gamma$. Il suffira donc, pour $n\in N$ fixé, de montrer que $q_{|Y_n}:Y_n\to q(Y_n)$ est une submersion. Or on a une application continue $[t,g]\to[t,g]g_n^{-1}$ de Y_n dans Y_n induisant, par passage au quotient, une section $\sigma_n:q(Y_n)\to Y_n$ de q. L'application continue $(q,q_n):Y_n\to q(Y_n)\times\Gamma$ induit un homéomorphisme sur le produit fibré $q(Y_n)\times_V\Gamma$ de $\bar\beta\circ\sigma_n$ et α, ayant pour réciproque l'application continue $(\xi,g)\to\sigma_n(\xi)g$. D'après le lemme, $pr_1:q(Y_n)\times_V\Gamma\to q(Y_n)$ est une submersion. La commutativité de

$$\begin{tikzcd} Y_n \arrow[rr, "{(q,q_n)}"] \arrow[dr, "q"'] & & q(Y_n)\times_V\Gamma \arrow[dl, "pr_1"] \\ & q(Y_n) & \end{tikzcd}$$

entraîne la même propriété pour $q:Y_n\to q(Y_n)$.

2.2. PROPOSITION. *Soit Γ un groupoïde topologique sur V, localement connexe par arc. Si $\alpha:\Gamma\to V$ est une submersion, alors $E\Gamma$ est localement connexe par arc.*

Montrons qu'un voisinage quelconque Ω de $[t,g]\in E\Gamma$ contient un ouvert $\Omega_0\ni[t,g]$ connexe par arc. Or il existe une partie finie $P\supset P_0$ de N où $P_0=\{n\in N\,|\,t_n\neq 0\}$, ensuite pour chaque $n\in P$ (resp. $n\in P_0$) un intervalle I_n, voisinage ouvert de t_n dans $[0,1]$ (resp. $]0,1]$), et enfin, pour chaque $n\in P_0$, un ouvert $V_n\ni g_n$ connexe par arc, et qu'on peut supposer élémentaire relativement à la submersion $\beta:\Gamma\to V$, tels que $\Omega_0\subset\Omega$, où l'ouvert $\Omega_0\ni[t,g]$ est défini par $\Omega_0=(\bigcap_{n\in P}p_n^{-1}(I_n))\cap(\bigcap_{n\in P_0}q_n^{-1}(V_n))$. Les V_n, $n\in P_0$, étant élémentaires, on peut supposer que l'ouvert connexe par arc $\beta(V_n)\ni\bar\beta([t,g])$ est indépendant de $n\in P_0$; on le désignera par U. Quels que soient $[\tau,\gamma],[\tau',\gamma']\in\Omega_0$, il s'agit alors d'indiquer un chemin $\delta:[0,1]\to\Omega_0$ d'origine $[\tau,\gamma]$ et d'extrémité $[\tau',\gamma']$. Soit $\mu:[0,1]\to U$ un chemin d'origine $\bar\beta([\tau,\gamma])$ et d'extrémité $\bar\beta([\tau',\gamma'])$. Pour tout $n\in P_0$, il existe, $\beta:V_n\to U$ étant une fibration triviale, un chemin $\delta_n:[0,1]\to V_n$ d'origine γ_n, d'extrémité γ_n' et tel que $\beta\circ\delta_n=\mu$. En posant $\delta_n=\mu$

pour $n \notin P_0$, on definit par

$$\delta(s) = [((1-s)\tau_0 + s\tau_0', \delta_0(s)), \ldots, ((1-s)\tau_n + s\tau_n', \delta_n(s)), \ldots]$$

un chemin $\delta: [0,1] \to E\Gamma$ d'origine $[\tau, \gamma]$ et d'extrémité $[\tau', \gamma']$. Il reste à observer qu'on a $\delta(s) \in \Omega_0$ pour tout $s \in [0,1]$. Or, pour $n \in P$, on a $p_n(\delta(s)) = (1-s)\tau_n + s\tau_n' \in I_n$ et, pour $n \in P_0$, on a $\tau_n, \tau_n' \in]0,1]$, d'où $(1-s)\tau_n + s\tau_n' \in]0,1]$ et $q_n(\delta(s)) = \delta_n(s) \in V_n$.

Si V est supposé connexe par arc, on aurait pu déjà montrer que $E\Gamma$ est connexe par arc. Ceci résultera aussi de la proposition (5.1.).

2.3. Etant donné un groupoïde Γ sur V, on posera, pour $x \in V$,

$$\Gamma_{x,} = \{g \in \Gamma | \alpha(g) = x\} \text{ et } \Gamma_{,x} = \{g \in \Gamma | \beta(g) = x\}.$$

Pour $\xi \in E\Gamma$, on désignera par $\xi^{\#}$ l'application $g \to \xi g$ de $\Gamma_{\beta(\xi)}$, dans $E\Gamma$ qui induit un homéomorphisme sur le sous-espace $q^{-1}(q(\xi))$.

PROPOSITION. *Soit Γ un groupoïde topologique, localement connexe par arc, sur V. On suppose que $\beta: \Gamma \to V$ est une submersion à fibres connexes. Alors le foncteur $q_*: \pi(E\Gamma) \to \pi(B\Gamma)$ est plein et, pour $\omega, \omega' \in \pi_{\xi_0 \xi}(E\Gamma)$, on a $q_*(\omega) = q_*(\omega')$ si et seulement s'il existe $\xi_i \in E\Gamma$, $\omega_i \in \pi_{\xi_{i-1}\xi_i}(E\Gamma)$, $i = 1, \ldots, n$, avec $\xi_n = \xi$, et $\delta_i \in \pi_{x_i}(\Gamma_{x_i,})$, où $x_i = \beta(\xi_i)$, $i = 0, \ldots, n$, tels qu'on ait $\omega = \omega_1 \cdots \omega_n$ et $\omega' = \xi_{0*}^{\#}(\delta_0)\omega_1 \xi_{1*}^{\#}(\delta_1) \cdots \xi_{(n-1)*}^{\#}(\delta_{n-1})\omega_n \xi_{n*}^{\#}(\delta_n)$.*

Il résulte d'abord de la proposition de (2.1) que $q: E\Gamma \to B\Gamma$ est une submersion, puisqu'il est équivalent de dire que $\alpha: \Gamma \to V$ est une submersion ou que $\beta: \Gamma \to V$ l'est. D'autre part, $E\Gamma$ est localement connexe par arc d'après la proposition de (2.2.). Les fibres de q sont connexes parce que homéomorphes aux fibres connexes de $\alpha: \Gamma \to V$. L'énoncé résulte alors du corollaire de (1.2.) et de la proposition de (1.3.), compte tenu des isomorphismes $\pi_{x_i}(\Gamma_{x_i,}) \to \pi_{\xi_i}(q^{-1}(q(\xi_i)))$ induits par les $\xi_i^{\#}$, $i = 0, \ldots, n$.

3. LE GROUPOÏDE DE LIE Hol($\mathscr{F}$)

3.1. Etant données des variétés V, W de même dimension, on désignera par $\Pi(V, W)$ l'ensemble des germes inversibles de morphismes $f: U \to W$, où U est une sous-variété ouverte de V. On a des applications source $\alpha: \Pi(V, W) \to V$ et but $\beta: \Pi(V, W) \to W$; pour $x \in V$, $y \in W$, on posera $\Pi_{xy}(V, W) = \alpha^{-1}(x) \cap \beta^{-1}(y)$ avec $\Pi_{xy}(V) = \Pi_{xy}(V, V)$ et $\Pi_x(V) = \Pi_{xx}(V)$. Des germes $\phi \in \Pi(U, V)$ $\psi \in \Pi(V, W)$ tels que $\beta(\phi) = \alpha(\psi)$ sont composables en un germe $\phi\psi \in \Pi(U, W)$. Soit maintenant $(V, \mathscr{F})$ une variété feuilletée c'est-à-dire une variété connexe de classe C^r, $1 \leq r \leq \infty$ ou ω, de dimension finie n et munie d'un feuilletage $\mathscr{F}$ de dimension p. On suppose que V est séparée. Etant données une feuille F de $(V, \mathscr{F})$ et des sous-variétés transverses (qu'on supposera toujours connexes) pointées (Σ_0, x_0), (Σ, x), avec x_0, $x \in F$, on désignera par $\mathrm{Hol}_{(\Sigma_0, x_0)(\Sigma, x)}(F)$ le sous-ensemble de $\Pi_{x_0 x}(\Sigma_0, \Sigma)$ formé des germes d'holonomie [9]; $\pi(F)$ désignant le groupoïde fondamental de F, on a une surjection $\chi_F: \pi_{x_0 x}(F) \to$

$\to \mathrm{Hol}_{(\Sigma_0, x_0)(\Sigma, x)}(F)$ [9]. Si $x_0 = x$, alors $x_{\Sigma_0\Sigma} \in \mathrm{Hol}_{(\Sigma_0, x_0)(\Sigma, x_0)}(F)$ désignera l'image par χ_F de l'élément neutre du groupe $\pi_{x_0}(F)$. Pour x_0, $x \in F$ fixés, on a sur

$$\bigcup_{\substack{\Sigma_0, \Sigma \in \mathscr{F}^{\pitchfork} \\ \Sigma_0 \ni x_0, \Sigma \ni x}} \mathrm{Hol}_{(\Sigma_0, x_0)(\Sigma, x)}(F)$$

où $\mathscr{F}^{\pitchfork}$ désigne l'ensemble des sous-variétés transverses, une relation d'équivalence $\phi \sim \phi'$ définie comme suit. On a $\phi \sim \phi'$, où $\phi \in \mathrm{Hol}_{(\Sigma_0, x_0)(\Sigma, x)}(F)$ et $\phi' \in \mathrm{Hol}_{(\Sigma_0', x_0)(\Sigma', x)}(F)$, si $\phi x_{\Sigma\Sigma'} = x_{\Sigma_0\Sigma_0'}\phi'$ dans $\Pi_{x_0x}(\Sigma_0, \Sigma')$. Le quotient sera désigné par $\mathrm{Hol}_{x_0x}(F)$. L'application canonique

$$\bigcup_{\substack{\Sigma_0, \Sigma \in \mathscr{F}^{\pitchfork} \\ \Sigma_0 \ni x_0, \Sigma \ni x}} \mathrm{Hol}_{(\Sigma_0, x_0)(\Sigma, x)}(F) \to \mathrm{Hol}_{x_0, x}(F)$$

induit, pour $\Sigma_0 \ni x_0$ et $\Sigma \ni x$ fixés, une bijection dite canonique $\phi \to \bar{\phi}$ de $\mathrm{Hol}_{(\Sigma_0, x_0)(\Sigma, x)}(F)$ sur $\mathrm{Hol}_{x_0x}(F)$. Pour x_0, x_1, $x_2 \in F$, on a une application $\mathrm{Hol}_{x_0x_1}(F) \times \mathrm{Hol}_{x_1x_2}(F) \to \mathrm{Hol}_{x_0x_2}(F)$, déduite de la composition des germes $\mathrm{Hol}_{(\Sigma_0, x_0)(\Sigma_1, x_1)}(F) \times \mathrm{Hol}_{(\Sigma_1, x_1)(\Sigma_2, x_2)}(F) \to \mathrm{Hol}_{(\Sigma_0, x_0)(\Sigma_2, x_2)}(F)$ par les bijections canoniques, et indépendante des sous-variétés transverses $\Sigma_i \ni x_i$, $i = 0, 1, 2$. La loi de composition ainsi définie partiellement sur

$$\mathrm{Hol}(F) = \bigcup_{x, y \in F} \mathrm{Hol}(F)$$

munit cet ensemble d'une structure de groupoïde transitif sur F; on désignera par $x \to \tilde{x}$ l'identification canonique évidente de F avec l'ensemble des unités de $\mathrm{Hol}(F)$. On peut dire [3] que $\mathrm{Hol}(F)$ est le groupoïde d'holonomie de F et que son groupe structural, noté aussi $\mathrm{Hol}(F)$, est le groupe d'holonomie de F. Pour x_0, $x \in F$ fixés, la surjection $\pi_{x_0x}(F) \to \mathrm{Hol}_{x_0x}(F)$, composée de $\chi_F : \pi_{x_0x}(F) \to$ $\to \mathrm{Hol}_{(\Sigma_0, x_0)(\Sigma, x)}(F)$ et de la bijection canonique $\mathrm{Hol}_{(\Sigma_0, x_0)(\Sigma, x)}(F) \to \mathrm{Hol}_{x_0x}(F)$, est indépendante de $\Sigma_0 \ni x_0$, $\Sigma \ni x$ et définit un foncteur plein $\pi(F) \to \mathrm{Hol}(F)$ qu'on désignera encore par χ_F, ou simplement par χ. La somme disjointe des $\mathrm{Hol}(F)$, où F parcourt les feuilles de $(V, \mathscr{F})$ est un groupoïde sur V qu'on désignera par $\mathrm{Hol}(\mathscr{F})$, qu'on appelle le groupoïde d'holonomie de $(V, \mathscr{F})$ et dont $\alpha : \mathrm{Hol}(\mathscr{F}) \to V$ et $\beta : \mathrm{Hol}(\mathscr{F}) \to V$ désigneront les applications source et but.

On dira qu'une sous-variété transverse Σ est saturante (resp. absolument transverse) si la restriction à Σ de l'application canonique de V sur l'espace des feuilles $V/\mathscr{F}$ est surjective (resp. injective). Si Σ est absolument transverse saturante, on a une surmersion, dite canonique, $p : V \to \Sigma$ correspondant à l'application canonique $V \to V/\mathscr{F}$ par la bijection $\Sigma \to V/\mathscr{F}$. Lorsque le feuilletage $\mathscr{F}_U$ induit par $\mathscr{F}$ sur une sous-variété ouverte connexe U de V est sans holonomie, on désignera par ϕ_{xy}^U, où x, y appartiennent à une feuille de $\mathscr{F}_U$, l'image par l'injection naturelle $\mathrm{Hol}_{xy}(\mathscr{F}_U) \to \mathrm{Hol}_{xy}(\mathscr{F})$ de l'unique élément auquel est réduit $\mathrm{Hol}_{xy}(\mathscr{F}_U)$. On dira que Σ est saturante (resp. absolument transverse) dans la sous-variété ouverte connexe $U \supset \Sigma$ de V si cette propriété est vérifiée pour $\mathscr{F}_U$. On dira qu'une bijection $h : \Sigma \to \Sigma'$ de sous-variétés transverses est un difféomorphisme d'holonomie élémentaire s'il existe un ouvert U

dans lequel Σ et Σ' soient saturants absolument transverses et tels que h soit la restriction de la surmersion canonique $U \to \Sigma'$. On a alors [9] $\overline{j_x(h)} = \phi^U_{xh(x)}$ dans $\mathrm{Hol}_{xh(x)}(F)$ pour tout $x \in \Sigma$. On appellera difféomorphisme d'holonomie le composé d'une suite finie de difféomorphismes d'holonomie élémentaires. Désignons par Θ l'ensemble des $\theta = (U, \Sigma, h, \Sigma', U')$, où $h: \Sigma \to \Sigma'$ est un difféomorphisme d'holonomie et où U (resp. U') est un ouvert dans lequel Σ (resp. Σ') est absolument transverse saturant. Sur le produit fibré $U \times_{\Sigma'} U'$ de $h \circ p$ et de p', où $p: U \to \Sigma$ et $p': U' \to \Sigma'$ sont les surmersions canoniques, on définit alors l'injection $\theta^*: U \times_{\Sigma'} U' \to \mathrm{Hol}(\mathscr{F})$ par $\theta^*(x, x') = \phi^U_{xp(x)} \overline{j_{p(x)}(h)} \phi^{U'}_{p'(x')x'}$. On posera $P_\theta = \mathrm{Im}\ \theta^*$. Ces notations étant posées, on peut énoncer la proposition suivante qui rejoint les diverses façons [2] [3] [5] [6] [13] de doter $\mathrm{Hol}(\mathscr{F})$ d'une structure naturelle de variété de dimension $n+p$.

PROPOSITION. i) $\mathrm{Hol}(\mathscr{F})$ *admet une et une seule structure de variété de classe* C^r *telle que, pour tout* $\theta \in \Theta$, P_θ *soit une sous-variété ouverte et* $\theta^*: U \times_{\Sigma'} U' \to P_\theta$ *un difféomorphisme, avec* $\theta = (U, \Sigma, h, \Sigma', U')$.

ii) $\mathrm{Hol}(\mathscr{F})$ *munie de cette structure de variété est un groupoïde de Lie connexe sur* V *et* $\alpha: \mathrm{Hol}(\mathscr{F}) \to V$ $\beta: \mathrm{Hol}(\mathscr{F}) \to V$ *sont des submersions.*

(iii) *Les sous-variétés* $\alpha^{-1}(x) = \mathrm{Hol}_{x,}(\mathscr{F})$ *et* $\beta^{-1}(x) = \mathrm{Hol}_{,x}(\mathscr{F})$, $x \in V$, *sont connexes.*

DÉMONSTRATION. i) Les P_θ, $\theta \in \Theta$, recouvrent $\mathrm{Hol}(\mathscr{F})$ puisque tout germe d'holonomie est le germe d'un difféomorphisme d'holonomie [9]. Pour θ, $\theta_1 \in \Theta$, avec $\theta = (U, \Sigma, h, \Sigma', U')$ et $\theta_1 = (U_1, \Sigma_1, h_1, \Sigma'_1, U'_1)$, il suffira donc de montrer que si

(1) $\qquad \theta^*(x_0, x'_0) = \theta_1^*(x_0, x'_0)$

alors $U \times_{\Sigma'} U'$ et $U_1 \times_{\Sigma'_1} U'_1$ définissent le même germe de sous-variété de $V \times V$ en (x_0, x'_0) et on a $j_{(x_0, x'_0)}(\theta^*) = j_{(x_0, x'_0)}(\theta_1^*)$. Ceci revient à indiquer une sous-variété $\Omega \ni (x_0, x'_0)$ de $V \times V$, ouverte dans $U \times_{\Sigma'} U'$ et $U_1 \times_{\Sigma'_1} U'_1$ et telle que l'on ait

(2) $\qquad \theta^*_{|\Omega} = \theta^*_{1|\Omega}$.

Or, avec les notations ci-dessus, (1) s'écrit

(3) $\qquad \phi^U_{x_0 p(x_0)} \overline{j_{p(x_0)}(h)} \phi^{U'}_{p'(x'_0)x'_0} = \phi^{U_1}_{x_0 p_1(x_0)} \overline{j_{p_1(x_0)}(h_1)} \phi^{U'_1}_{p'_1(x'_0)x'_0}$.

Soient U_2, U'_2 des ouverts et Σ_2, Σ'_2 des sous-variétés transverses avec

$$x_0 \in \Sigma_2 \subset U_2 \subset U \cap U_1 \text{ et } x'_0 \in \Sigma'_2 \subset U'_2 \subset U' \cap U'_1,$$

tels que

$$p_{|\Sigma_2}: \Sigma_2 \to p(\Sigma_2),\ p_{1|\Sigma_2}: \Sigma_2 \to p_1(\Sigma_2),\ p'_{|\Sigma'_2}: \Sigma'_2 \to p'(\Sigma'_2),\ p'_{1|\Sigma'_2}: \Sigma'_2 \to p'_1(\Sigma'_2)$$

soient des difféomorphismes d'holonomie élémentaires, et avec Σ_2 (resp. Σ'_2) absolument transverse saturant dans U_2 (resp. U'_2). Compte tenu de (3), on a alors un difféomorphisme d'holonomie $h_2 : \Sigma_2 \to \Sigma_2'$ rendant commutatifs

$$\begin{tikzcd} \Sigma_2 \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "p_{|\Sigma_2}"'] & \Sigma_2' \arrow[d, "p'_{|\Sigma_2'}"] \\ \Sigma \arrow[r, "h"] & \Sigma' \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \Sigma_2 \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "p_{1|\Sigma_2}"'] & \Sigma_2' \arrow[d, "p'_{1|\Sigma_2'}"] \\ \Sigma_1 \arrow[r, "h_1"] & \Sigma_1' \end{tikzcd}$$

Soit $\theta_2 = (U_2, \Sigma_2, h_2, \Sigma_2', U_2')$. La commutativité des carrés ci-dessus entraîne que $\Omega = U_2 \times_{\Sigma_2'} U_2'$ est un ouvert de $U \times_{\Sigma'} U'$ et de $U_1 \times_{\Sigma_1'} U_1'$ et que l'on a $\theta^{\#}(x, x') = \theta_2^{\#}(x, x') = \theta_1^{\#}(x, x')$ pour tout $(x, x') \in U_2 \times_{\Sigma_2'} U_2'$, c'est-à-dire (2).

Dans ce qui suit, on dira que les P_θ, $\theta \in \Theta$, sont les ouverts fondamentaux de la variété $\mathrm{Hol}(\mathscr{F})$.

ii) Au moyen des difféomorphismes $\theta^{\#}$, $\theta \in \Theta$, on vérifie aisément que $\beta : \mathrm{Hol}(\mathscr{F}) \to V$ et $\alpha : \mathrm{Hol}(\mathscr{F}) \to V$ sont des submersions et que la loi de composition de $\mathrm{Hol}(\mathscr{F})$, définie sur le produit fibré de β et α, est un morphisme de variétés. De même, il sera clair que l'inversion $\phi \to \phi^{-1}$ du groupoïde $\mathrm{Hol}(\mathscr{F})$ est un morphisme et que $x \to \tilde{x}$ est un plongement de V dans $\mathrm{Hol}(\mathscr{F})$. Il résultera de iii) que le groupoïde de Lie $\mathrm{Hol}(\mathscr{F})$ sur V est connexe, compte tenu de $\mathrm{Hol}(\mathscr{F}) = \bigcup_{x \in V} \mathrm{Hol}_{x,}(\mathscr{F})$.

iii) Il suffit, pour $x_0 \in V$ fixé, de montrer que $\mathrm{Hol}_{x_0,}(\mathscr{F})$ est connexe; ce qui revient, pour tout $\phi \in \mathrm{Hol}_{x_0,}(\mathscr{F})$, à indiquer un chemin de $\mathrm{Hol}_{x_0,}(\mathscr{F})$ d'origine $\tilde{x}_0$ et d'extrémité ϕ. On montrera que $\bar{\gamma} : [0, 1] \to \mathrm{Hol}_{x_0,}(\mathscr{F})$, défini par $\bar{\gamma}(t) = \chi([\gamma_{|[0,t]}])$, où le chemin $\gamma : [0, 1] \to F_{x_0}$ vérifie $\chi([\gamma]) = \phi$, est continu en tout $t_0 \in [0, 1]$; F_{x_0} désigne la feuille par x_0. Pour $\theta = (U, \Sigma, h, \Sigma', U')$ tel que $\overline{j_{x_0}(h)} = \bar{\gamma}(t_0)$, il suffit de montrer qu'un intervalle I, voisinage de t_0 dans $[0, 1]$ tel que $\gamma(I) \subset U'$, vérifie aussi $\bar{\gamma}(I) \subset P_\theta$. Pour $t \in I$, montrons donc qu'on a

(4) $\qquad \bar{\gamma}(t) \in P_\theta$.

Pour $t \geq t_0$ (resp. $t \leq t_0$) ceci résulte de $\bar{\gamma}(t) = \bar{\gamma}(t_0)\chi([\gamma_{|[t_0,t]}]) = \bar{\gamma}(t_0)\phi^{U'}_{\gamma(t_0)\gamma(t)}$ (resp. $\bar{\gamma}(t_0) = \bar{\gamma}(t)\chi([\gamma_{|[t,t_0]}]) = \bar{\gamma}(t)\phi^{U'}_{\gamma(t)\gamma(t_0)}$, d'où aussi $\bar{\gamma}(t) = \bar{\gamma}(t_0)\phi^{U'}_{\gamma(t_0)\gamma(t)}$).

3.2. Conformément à une terminologie proposée par Pradines [7], on dira qu'un groupoïde de Lie Γ sur une variété connexe V est galoisien si $(\alpha, \beta) : \Gamma \to V \times V$ est étale et surjectif. Pour tout $x_0 \in V$, on a alors des revêtements galoisiens $\alpha : \Gamma_{,x_0} \to V$ et $\beta : \Gamma_{x_0,} \to V$. On définit une application $\nu : \pi(V) \to \Gamma$ en posant que $\nu(\omega)$, où $\omega \in \pi_{x_0 x}(V)$, est l'extrémité du relèvement d'origine x_0 d'un chemin γ de V tel que $[\gamma] = \omega$, relativement au revêtement $\beta : \Gamma_{x_0,} \to V$. On observe aisément:

REMARQUE. i) *$\nu : \pi(V) \to \Gamma$ est un foncteur.*

ii) *Le foncteur ν est plein si et seulement si les $\Gamma_{x,}$, $x \in V$, sont connexes, et on a alors les suites exactes:*

$$1 \to \pi_x(\Gamma_{x,}) \xrightarrow{\beta_*} \pi_x(V) \xrightarrow{\nu} \Gamma_x \to 1,$$

$$1 \to \pi_x(\Gamma_{,x}) \xrightarrow{\alpha_*} \pi_x(V) \xrightarrow{\nu} \Gamma_x \to 1.$$

iii) *Soient Γ et Γ' des groupoïdes de Lie galoisiens sur V et V' respectivement et soit $f:\Gamma\to\Gamma'$ un foncteur des groupoïdes de Lie. Le carré*

$$\begin{tikzcd} \pi(V) \arrow[r, "f_{1*}"] \arrow[d, "\nu"'] & \pi(V') \arrow[d, "\nu'"] \\ \Gamma \arrow[r, "f"] & \Gamma' \end{tikzcd}$$

est commutatif, où $f_1: V\to V'$ est induit par f.

On dira que $\nu:\pi(V)\to\Gamma$ est le foncteur canonique du groupoïde de Lie galoisien Γ.

3.3. Pour la variété feuilletée $(V, \mathscr{F})$ ci-dessus, on désignera par $\alpha^{-1}(\mathscr{F})$ (resp. $\beta^{-1}(\mathscr{F})$) le feuilletage image réciproque de $\mathscr{F}$ par la submersion $\alpha:\mathrm{Hol}(\mathscr{F})\to V$ (resp. $\beta:\mathrm{Hol}(\mathscr{F})\to V$).

REMARQUE. $\alpha^{-1}(\mathscr{F})=\beta^{-1}(\mathscr{F})$.

Il suffit, pour tout $\phi\in\mathrm{Hol}(\mathscr{F})$, d'indiquer un ouvert $\Omega\ni\phi$ et une application $k:\Omega\to R^{n-p}$ distinguée pour $\alpha^{-1}(\mathscr{F})$ et $\beta^{-1}(\mathscr{F})$. Or soit $\theta\in\Theta$, où $\theta=(U, \Sigma, h, \Sigma', U')$, avec $\overline{j_{\alpha(\phi)}(h)}=\phi$ et où on suppose que U' est le domaine d'une application distinguée f de $\mathscr{F}$. On sait [9] que $f_{|\Sigma'}\circ h\circ p: U\to R^{n-p}$ est aussi une application distinguée de $\mathscr{F}$. La commutativité de

$$\begin{tikzcd} P_\theta \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & U' \arrow[d, "f"] \\ U \arrow[r, "f_{|\Sigma'}\circ h\circ p"'] & R^{n-p} \end{tikzcd}$$

entraîne alors que P_θ est le domaine de l'application $(f_{|\Sigma'}\circ h\circ p)\circ\alpha=f\circ\beta$, distinguée pour $\alpha^{-1}(\mathscr{F})$ et $\beta^{-1}(\mathscr{F})$.

D'une façon générale, on désignera par $V_{\mathscr{F}}$ la structure de variété sur V définie par le feuilletage $\mathscr{F}$ et dont les composantes connexes sont les feuilles. On posera alors $\widehat{\mathrm{Hol}}(\mathscr{F})=(\mathrm{Hol}(\mathscr{F}))_{\hat{\mathscr{F}}}$, où $\hat{\mathscr{F}}$ est le feuilletage $\alpha^{-1}(\mathscr{F})=\beta^{-1}(\mathscr{F})$.

PROPOSITION. *Soit $(V, \mathscr{F})$ une variété feuilletée.*

i) *les feuilles de $\hat{\mathscr{F}}$ sont les* $\mathrm{Hol}(F)$, $F\in V/\mathscr{F}$.

ii) *Chaque groupoïde* $\mathrm{Hol}(F)$, $F\in V/\mathscr{F}$, *muni de sa structure de feuille de* $(\mathrm{Hol}(\mathscr{F}), \hat{\mathscr{F}})$ *est un groupoïde de Lie galoisien sur F, et dont χ_F est le foncteur canonique.*

DÉMONSTRATION. i) Pour toute feuille F de $(V, \mathscr{F})$, il s'agit de vérifier que le sous-espace $\mathrm{Hol}(F) = \alpha^{-1}(F)$ de $\widehat{\mathrm{Hol}}(\mathscr{F})$ est connexe. Or on a $\mathrm{Hol}(F) = \bigcup_{x \in F} \mathrm{Hol}_x\ (\mathscr{F})$ et on observe ce qui suit. D'une part, chaque $\mathrm{Hol}_x\ (\mathscr{F}) = \alpha^{-1}(x)$, est, d'après la proposition de (3.1.), un sous-espace connexe de $\mathrm{Hol}(\mathscr{F})$ et est aussi un sous-espace propre [9] relativement à $\hat{\mathscr{F}}$; donc les $\mathrm{Hol}_x\ (\mathscr{F})$, $x \in F$, sont des sous-espaces connexes de $\widehat{\mathrm{Hol}}(\mathscr{F})$. D'autre part, F est aussi un sous-espace connexe de $\widehat{\mathrm{Hol}}(\mathscr{F})$, du fait que l'injection canonique $i: F \to \widehat{\mathrm{Hol}}(\mathscr{F})$ est continue; en effet [9], $i: F \to \mathrm{Hol}(F)$, c'est-à-dire la composée de l'immersion $F \to V$ et du plongement canonique $V \to \mathrm{Hol}(\mathscr{F})$, et $\alpha \circ i: F \to V_{\mathscr{F}}$ sont continues.

ii) On sait [9] que les submersions $\alpha: \mathrm{Hol}(\mathscr{F}) \to V$ et $\beta: \mathrm{Hol}(\mathscr{F}) \to V$ induisent des submersions $\alpha: \mathrm{Hol}(F) \to F$ et $\beta: \mathrm{Hol}(F) \to F$. La loi de composition $\kappa: (\phi, \psi) \to \phi\psi$ de $\mathrm{Hol}(F)$ est donc définie sur une sous-variété $\mathrm{Hol}(F) \times_F \mathrm{Hol}(F)$ de $\mathrm{Hol}(F) \times \mathrm{Hol}(F)$ et il s'agit d'abord de vérifier que $\kappa: \mathrm{Hol}(F) \times_F \mathrm{Hol}(F) \to \widehat{\mathrm{Hol}}(\mathscr{F})$ est un morphisme. Or ceci résulte [9], d'une part, de ce qui $\kappa: \mathrm{Hol}(F) \times_F \mathrm{Hol}(F) \to \mathrm{Hol}(\mathscr{F})$, composée de l'immersion évidente $\mathrm{Hol}(F) \times_F \mathrm{Hol}(F) \to \mathrm{Hol}(\mathscr{F}) \times_V \mathrm{Hol}(\mathscr{F})$ et de la loi de composition de $\mathrm{Hol}(\mathscr{F})$, est un morphisme et, d'autre part, de ce que $\alpha \circ \kappa: \mathrm{Hol}(F) \times_F \mathrm{Hol}(F) \to V_{\mathscr{F}}$ est aussi un morphisme; en effet $\alpha \circ \kappa$ se factorise en des morphismes $pr_1: \mathrm{Hol}(F) \times_F \mathrm{Hol}(F) \to \mathrm{Hol}(F)$ et $\alpha: \mathrm{Hol}(F) \to V_{\mathscr{F}}$. Observons ensuite que l'inversion $\sigma: \phi \to \phi^{-1}$ est un morphisme de $\mathrm{Hol}(F)$ dans $\widehat{\mathrm{Hol}}(\mathscr{F})$. En effet [9] $\sigma: \mathrm{Hol}(F) \to \widehat{\mathrm{Hol}}(\mathscr{F})$, qui se factorise en l'immersion canonique $\mathrm{Hol}(F) \to \mathrm{Hol}(\mathscr{F})$ et l'inversion du groupoïdè de Lie $\mathrm{Hol}(\mathscr{F})$ est un morphisme; d'autre part, $\alpha \circ \sigma: \mathrm{Hol}(F) \to V_{\mathscr{F}}$ c'est-à-dire β est un morphisme puisque $\alpha^{-1}(\mathscr{F}) = \hat{\mathscr{F}} = \beta^{-1}(\mathscr{F})$. Comme on l'a remarqué dans la démonstration de i), l'injection canonique $F \to \mathrm{Hol}(F)$ est un morphisme, donc un plongement, ce qui achève de montrer que $\mathrm{Hol}(F)$ est un groupoïde de Lie sur F.

Montrons maintenant que le groupoïde de Lie $\mathrm{Hol}(F)$ est galoisien, c'est-à-dire que la restriction de $(\alpha, \beta): \mathrm{Hol}(F) \to F \times F$ à un voisinage ouvert convenable de $\phi \in \mathrm{Hol}(F)$ est un difféomorphisme sur un ouvert. Soit $\theta \in \Theta$, avec $\theta = (U, \Sigma, h, \Sigma', U')$ et $\phi = \overline{j_x(h)}$, et soit P (resp. P') la feuille de $\mathscr{F}_U$ (resp. $\mathscr{F}_{U'}$) par x (resp. $h(x)$). Puisque les sous-espaces P, P' de V sont propres relativement à $\mathscr{F}$, on sait [9] que les sous-espaces $\alpha^{-1}(P)$ et $\beta^{-1}(P')$ de $\mathrm{Hol}(\mathscr{F})$ sont propres relativement à $\hat{\mathscr{F}} = \alpha^{-1}(\mathscr{F}) = \beta^{-1}(\mathscr{F})$. Donc le difféomorphisme $\theta^{\#}: U \times_{\Sigma'} U' \to P_\theta$ induit un difféomorphisme de l'ouvert $P \times P'$ de $F \times F$ sur l'ouvert $P_\theta \cap \alpha^{-1}(P) \cap \beta^{-1}(P') \ni \phi$ de $\mathrm{Hol}(F)$ dont la réciproque n'est autre que la restriction de $(\alpha, \beta): \mathrm{Hol}(F) \to F \times F$. Montrons enfin que le foncteur canonique de $\mathrm{Hol}(F)$ est χ_F. Pour tout chemin $\gamma: [0, 1] \to F$, il s'agit d'observer que le chemin $\tilde{\gamma}: [0, 1] \to \mathrm{Hol}_{\gamma(0)}\ (\mathscr{F})$, défini dans la démonstration de iii) de la proposition de (3.1.) par $\tilde{\gamma}(t) = \chi_F([\gamma_{|[0,t]}])$, est un relèvement de γ relativement au revêtement $\beta: \mathrm{Hol}_{\gamma(0)}\ (F) \to F$. Or ceci résulte de ce que le sous-espace $\mathrm{Hol}_{\gamma(0)}\ (F) = \mathrm{Hol}_{\gamma(0)}\ (\mathscr{F})$ de $\mathrm{Hol}(\mathscr{F})$ est, comme on l'a remarqué dans i), propre relativement à $\hat{\mathscr{F}}$.

COROLLAIRE. *Pour tout $x \in V$, on a des suites exactes*

$$1 \to \pi_{\tilde{x}}(\mathrm{Hol}_{x,}\ (F_x)) \xrightarrow{\beta_*} \pi_x(F_x) \xrightarrow{\chi} \mathrm{Hol}_x(F_x) \to 1$$

et

$$1 \to \pi_{\tilde{x}}(\mathrm{Hol}\ _{,x}(F_x)) \xrightarrow{\alpha_*} \pi_x(F_x) \xrightarrow{\chi} \mathrm{Hol}_x(F_x) \to 1.$$

4. LE GROUPOÏDE FONDAMENTAL $\pi(\mathscr{F})$

4.1. Dans ce qui suit, les sous-variétés transverses d'une variété feuilletée $(V, \mathscr{F})$ seront supposées non seulement connexes, mais aussi simplement connexes, et $\mathscr{F}^{\pitchfork}$ désignera leur ensemble. Pour Σ_0, $\Sigma \in \mathscr{F}^{\pitchfork}$, on sait [9] que

$$\mathrm{Hol}_{\Sigma_0\Sigma}(\mathscr{F}) = \bigcup_{\substack{y \in F_x \cap \Sigma \\ x \in \Sigma_0}} \mathrm{Hol}_{(\Sigma_0, x)(\Sigma, y)}(F_x)$$

est un ouvert de $\Pi(\Sigma_0, \Sigma)$ muni de la topologie d'espace étalé par $\alpha : \Pi(\Sigma_0, \Sigma) \to \to \Sigma_0$. C'est cette topologie que l'on considérera sur $\mathrm{Hol}_{\Sigma_0\Sigma}(\mathscr{F})$, supposé non vide; $C(\phi)$ désignera la composante connexe dans $\mathrm{Hol}_{\Sigma_0\Sigma}(\mathscr{F})$ de ϕ. On appellera chaîne d'holonomie de $(V, \mathscr{F})$ un système $\Gamma = (\Sigma_0, \phi_1, \ldots, \phi_n, \Sigma_n)$, avec $\phi_i \in \mathrm{Hol}_{\Sigma_{i-1}\Sigma_i}(\mathscr{F})$ et $\Sigma_i \in \mathscr{F}^{\pitchfork}$. On dira que Σ_0 (resp. Σ_n) est l'origine (resp. l'extrémité) de Γ. On sait [11] que l'ensemble $\overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma_0\Sigma}(\mathscr{F})$ des chaînes d'holonomie d'origine Σ_0 et d'extrémité Σ n'est pas vide. D'où une loi de composition $(\Gamma, \Gamma') \to \Gamma * \Gamma'$ associative, partiellement définie sur

$$\overline{\mathrm{Hol}}(\mathscr{F}) = \bigcup_{\Sigma_0, \Sigma \in \mathscr{F}^{\pitchfork}} \overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma_0\Sigma}(\mathscr{F})$$

par les applications $\overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma_0\Sigma_1}(\mathscr{F}) \times \overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma_1\Sigma_2}(\mathscr{F}) \to \overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma_0\Sigma_2}(\mathscr{F})$, avec $\Sigma_i \in \mathscr{F}^{\pitchfork}$ et où $\Gamma * \Gamma'$ est la réunion évidente de Γ et de Γ'. Pour Γ, $\Gamma' \in \mathrm{Hol}_{\Sigma_0\Sigma}(\mathscr{F})$ avec $\Gamma = (\Sigma_0, \phi_1, \ldots, \phi_n, \Sigma_n)$ et $\Gamma' = (T_0, \psi_1, \ldots, \psi_m, T_m)$, on posera $\Gamma < \Gamma'$ si $m = n + 1$ et qu'il existe $0 \leq i_0 < n$, $\phi' \in C(\psi_{i_0})$, $\phi'' \in C(\psi_{i_0+1})$ tels qu'on ait $\Sigma_i = T_i$ pour $1 \leq i \leq i_0$, $\Sigma_i = T_{i+1}$ pour $i_0 + 1 \leq i \leq n$, $\phi_i = \psi_i$ pour $1 \leq i < i_0$, $\phi_{i_0} = \phi'\phi''$ et $\phi_i = \psi_{i+1}$ pour $i_0 < i < n$. On désignera par $\pi_{\Sigma_0\Sigma}(\mathscr{F})$ le quotient de $\overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma_0\Sigma}(\mathscr{F})$ par la relation d'équivalence engendrée par $<$. La loi de composition de $\overline{\mathrm{Hol}}(\mathscr{F})$ induit sur

$$\pi(\mathscr{F}) = \bigcup_{\Sigma_0, \Sigma \in \mathscr{F}^{\pitchfork}} \pi_{\Sigma_0\Sigma}(\mathscr{F})$$

une loi de composition $(\Phi, \Psi) \to \Phi * \Psi$ munissant $\pi(\mathscr{F})$ d'une structure de groupoïde transitif sur $\mathscr{F}^{\pitchfork}$ [11]. On dira que $\Gamma \in \overline{\mathrm{Hol}}(\mathscr{F})$ est un représentant de $\kappa(\Gamma)$, où $\kappa : \overline{\mathrm{Hol}}(\mathscr{F}) \to \pi(\mathscr{F})$ est l'application canonique. Pour $\phi \in \mathrm{Hol}_{\Sigma_0\Sigma}(\mathscr{F})$, on posera $[\phi] = \kappa(\phi)$, compte tenu de l'injection canonique évidente $\mathrm{Hol}_{\Sigma_0\Sigma}(\mathscr{F}) \to \overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma_0\Sigma}(\mathscr{F})$. On observe [11] que $C(\phi) = C(\phi')$ entraîne:

(1) $\qquad [\phi] = [\phi']$.

Si $(\Sigma_0, \phi_1, \ldots, \phi_n, \Sigma)$ est un représentant de $\Phi \in \pi_{\Sigma_0\Sigma}(\mathscr{F})$, alors on a

(2) $\qquad \Phi = [\phi_1] * \cdots * [\phi_n]$.

Plus particulièrement, pour des germes d'holonomie composables $\phi \in \mathrm{Hol}_{\Sigma_0\Sigma_1}(\mathscr{F})$, $\phi' \in \mathrm{Hol}_{\Sigma_1\Sigma_2}(\mathscr{F})$, on a

(3) $\qquad [\phi\phi'] = [\phi] * [\phi']$.

Pour $x \in \Sigma_0 \cap \Sigma$, où Σ_0, $\Sigma \in \mathscr{F}^{\mathrm{th}}$, on posera $\hat{x}_{\Sigma_0\Sigma} = [x_{\Sigma_0\Sigma}]$. Pour x_0, $x \in V$ fixés, on a alors sur

$$\bar{\pi}_{x_0x}(\mathscr{F}) = \bigcup_{\substack{\Sigma_0 \ni x_0 \\ \Sigma \ni x \\ \Sigma_0, \Sigma \in \mathscr{F}^{\mathrm{th}}}} \pi_{\Sigma_0\Sigma}(\mathscr{F})$$

une relation l'équivalence $\Phi \sim \Phi'$, où $\Phi \in \pi_{\Sigma_0\Sigma}(\mathscr{F})$ et $\Phi' \in \pi_{\Sigma_0'\Sigma'}(\mathscr{F})$, définie par $\hat{x}_{0\Sigma_0\Sigma_0'} * \Phi' = \Phi * \hat{x}_{\Sigma\Sigma'}$, et dont le quotient sera désigné par $\pi_{x_0x}(\mathscr{F})$. Des sous-variétés transverses pointées (Σ_0, x_0), (Σ, x) étant fixées, on a alors par restriction de l'application canonique $\bar{\pi}_{x_0x}(\mathscr{F}) \to \pi_{x_0x}(\mathscr{F})$ une bijection, dite canonique, $\Phi \to \bar{\Phi}$ de $\pi_{\Sigma_0\Sigma}(\mathscr{F})$ sur $\pi_{x_0x}(\mathscr{F})$. Quels que soient x_0, x_1, $x_2 \in V$, on a une application $(\Phi, \Psi) \to \Phi * \Psi$ de $\pi_{x_0x_1}(\mathscr{F}) \times \pi_{x_1x_2}(\mathscr{F})$ dans $\pi_{x_0x_2}(\mathscr{F})$, déduite de la loi de composition $\pi_{\Sigma_0\Sigma_1}(\mathscr{F}) \times \pi_{\Sigma_1\Sigma_2}(\mathscr{F}) \to \pi_{\Sigma_0\Sigma_2}(\mathscr{F})$ du groupoïde $\pi(\mathscr{F})$ au moyen des bijections canoniques $\pi_{\Sigma_i\Sigma_j}(\mathscr{F}) \to \pi_{x_ix_j}(\mathscr{F})$ et indépendante des $\Sigma_i \ni x_i$, $i = 0, 1, 2$. Sur

$$\bigcup_{x_0, x \in V} \pi_{x_0x}(\mathscr{F}),$$

on déduit ainsi de $\pi(\mathscr{F})$ une structure de groupoïde transitif sur V, ayant même groupe structural que $\pi(\mathscr{F})$, qu'on désignera aussi, sauf risque de confusion, par $\pi(\mathscr{F})$ et qu'on appellera le groupoïde fondamental de $\mathscr{F}$. On dira que le groupe structural de $\pi(\mathscr{F})$, noté aussi $\pi(\mathscr{F})$, est le groupe fondamental de $\mathscr{F}$. Ce groupe n'est autre que le groupe fondamental défini par van Est [8] pour le schéma de variété associé à $(V, \mathscr{F})$. Pour une feuille F et x_0, $x \in F$ fixés, on a une application $\eta_F : \mathrm{Hol}_{x_0x}(F) \to \pi_{x_0x}(\mathscr{F})$ rendant commutatif le carré

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hol}_{(\Sigma_0, x_0)(\Sigma, x)}(F) \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d] & \pi_{\Sigma_0\Sigma}(\mathscr{F}) \arrow[d] \\
\mathrm{Hol}_{x_0x}(F) \arrow[r, "\eta_F"] & \pi_{x_0x}(\mathscr{F})
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont des bijections canoniques, et indépendante de $\Sigma_0 \ni x_0$, $\Sigma \ni x$. Compte tenu de (3), on a défini ainsi un foncteur $\eta : \mathrm{Hol}(\mathscr{F}) \to$ $\to \pi(\mathscr{F})$ de groupoïdes sur V. Pour $\Sigma \in \mathscr{F}^{\mathrm{th}}$, on désignera par e_Σ l'élément neutre du groupe $\pi_\Sigma(\mathscr{F}) = \pi_{\Sigma\Sigma}(\mathscr{F})$ et, pour x_0, $x \in \Sigma$, on posera $e_{(x_0, \Sigma, x)} = \bar{e}_\Sigma$ dans $\pi_{x_0x}(\mathscr{F})$. Dans le cas où $x_0 = x$, $\bar{e}_\Sigma$ est l'élément neutre de $\pi_x(\mathscr{F}) = \pi_{xx}(\mathscr{F})$, indépendant de Σ, et noté $\tilde{x}$. Etant donnés ϕ, $\phi' \in \mathrm{Hol}_{\Sigma_0\Sigma}(\mathscr{F})$ avec $\alpha(\phi) = x_0$, $\beta(\phi) = x$, $\alpha(\phi') = x_0'$, $\beta(\phi') = x'$ et tels que $C(\phi) = C(\phi')$, on a, compte tenu de (1)

(4) $\qquad e_{(x_0, \Sigma_0, x_0')} * \eta(\bar{\phi}') = \eta(\bar{\phi}) * e_{(x, \Sigma, x')}$.

Si $\Phi\in\pi_{\Sigma_0\Sigma}(\mathscr{F})$ admet le représentant $\Gamma\in\overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma_0\Sigma}(\mathscr{F})$, où

$$\Gamma=(\Sigma_0,\phi_0,\dots,\phi_{n-1},\Sigma),$$

on a alors, compte tenu de (2)

$$(5)\qquad\left\{\begin{array}{l}\bar{\Phi}=e_{(x_0,\Sigma_0,y_0)}*\eta(\bar{\phi}_0)*e_{(z_0,\Sigma_1,y_1)}*\cdots*e_{(z_{n-2},\Sigma_{n-1},y_{n-1})}\\ \qquad *\eta(\bar{\phi}_{n-1})*e_{(z_{n-1},\Sigma,x)}\end{array}\right.$$

dans $\pi_{x_0x}(\mathscr{F})$, avec $y_i=\alpha(\phi_i)$, $z_i=\beta(\phi_i)$.

4.2. Etant donnés un ouvert connexe U de la variété feuilletée $(V,\mathscr{F})$ et des sous-variétés Σ_0, Σ transverses à $\mathscr{F}_U$, on a une application, dite canonique, $\pi_{\Sigma_0\Sigma}(\mathscr{F}_U)\to\pi_{\Sigma_0\Sigma}(\mathscr{F})$ induite par l'inclusion $\overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma_0\Sigma}(\mathscr{F}_U)\subset\overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma_0\Sigma}(\mathscr{F})$. Pour x_0, $x\in U$ fixés on a alors une application, $\pi_{x_0x}(\mathscr{F}_U)\to\pi_{x_0x}(\mathscr{F})$ rendant commutatif

$$\begin{tikzcd}\pi_{\Sigma_0\Sigma}(\mathscr{F}_U) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_{\Sigma_0\Sigma}(\mathscr{F}) \arrow[d]\\ \pi_{x_0x}(\mathscr{F}_U) \arrow[r] & \pi_{x_0x}(\mathscr{F})\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les bijections canoniques, et indépendante des sous-variétés transverses $\Sigma_0\ni x_0$, $\Sigma\ni x$. D'où un foncteur dit canonique $\pi(\mathscr{F}_U)\to\pi(\mathscr{F})$. Pour des ouverts connexes $U\subset U'$ de V, le diagramme

$$\begin{tikzcd}\pi(\mathscr{F}_U) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \pi(\mathscr{F}_{U'}) \arrow[dl]\\ & \pi(\mathscr{F}) & \end{tikzcd}$$

est commutatif. Cette propriété et le lemme suivant permettront de doter le groupoïde $\pi(\mathscr{F})$ d'une structure de Lie galoisienne dont le foncteur canonique $\pi(V)\to\pi(\mathscr{F})$ est plein.

LEMME [11]. *Pour que le groupoïde fondamental du feuilletage $\mathscr{F}$ de V soit trivial, il suffit que V soit saturé par une sous-variété absolument transverse.*

Pour un ouvert connexe U de $(V,\mathscr{F})$ tel que $\pi(\mathscr{F}_U)$ soit trivial, $\Phi_{xy}^U\in\pi_{xy}(F)$, où x, $y\in U$, désignera l'unique élément de l'image de $\pi_{xy}(\mathscr{F}_U)\to\pi_{xy}(\mathscr{F})$. Soit alors Z l'ensemble des $\zeta=(U,\Phi,x_0,\Phi',U')$, où les ouverts connexes U, U' de V sont tels que $\pi(\mathscr{F}_U)$, $\pi(\mathscr{F}_{U'})$ soient triviaux, où $x_0\in V$ et où Φ, $\Phi'\in\pi(\mathscr{F})$ vérifient $\alpha(\Phi)\in U$, $\beta(\Phi)=x_0=\alpha(\Phi')$, $\beta(\Phi')\in U'$. On dira que $U\times U'$ est le domaine de ζ. On associe à ζ la bijection $\zeta^{\#}$ de $\pi_{x_0}(F)\times U\times U'$ sur

$$\pi_{UU'}(\mathscr{F})=\{\Psi\in\pi(\mathscr{F})\mid\alpha(\Psi)\in U,\ \beta(\Psi)\in U'\}$$

définie par $\zeta^{\#}(\Psi, x, x') = \Phi_x^{-1} * \Phi * \Psi * \Phi' * \Phi'_{x'}$, avec $\Phi_x = \Phi^U_{\alpha(\Phi)x}$ et $\Phi'_{x'} = \Phi^{U'}_{\beta(\Phi)x'}$. On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \pi_{x_0}(\mathscr{F}) \times U \times U' \arrow[rr, "\zeta^{\#}"] \arrow[dr, "pr_{U\times U'}"'] & & \pi_{UU'}(\mathscr{F}) \arrow[dl, "(\alpha,\beta)"] \\ & U \times U' & \end{tikzcd}$$

ce qui permet d'énoncer, relativement à la structure discrète de $\pi_{x_0}(\mathscr{F})$:

PROPOSITION. i) *$\pi(\mathscr{F})$ admet une structure de variété de classe C^r telle que $(\alpha, \beta): \pi(\mathscr{F}) \to V \times V$ soit un revêtement admettant les cartes $\zeta^{\#}$, avec $\zeta \in Z$.*

ii) *Pour toute sous-variété transverse Σ de $(V, \mathscr{F})$ l'application $\Sigma^{\#}: (x, y) \to \to e_{(x, \Sigma, y)}$ de $\Sigma \times \Sigma$ dans $\pi(\mathscr{F})$ est un morphisme de variétés.*

iii) *Le groupoïde $\pi(\mathscr{F})$ est un groupoïde de Lie galoisien sur V, relativement à la structure de variété définie par* i).

iv) *$\eta: \mathrm{Hol}(\mathscr{F}) \to \pi(\mathscr{F})$ est une immersion.*

v) *Le foncteur canonique $\chi: \Pi(V) \to \pi(\mathscr{F})$ du groupoïde galoisien $\pi(\mathscr{F})$ est plein et, pour toute feuille F, le carré*

$$(1) \qquad \begin{tikzcd} \pi(F) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "\chi_F"] & \pi(V) \arrow[d, "\chi"] \\ \mathrm{Hol}(F) \arrow[r, "\eta_F"] & \pi(\mathscr{F}) \end{tikzcd}$$

où j_* est induit par l'immersion canonique $j: F \to V$, est commutatif.

DÉMONSTRATION. i) Compte tenu du lemme, il est clair que les domaines des $\zeta \in Z$ recouvrent $V \times V$. Quels que soient ζ_1, $\zeta_2 \in Z$, où $\zeta_i = (U_i, \Phi_i, x_i, \Phi'_i, U'_i)$, i = 1;2, avec $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, $U'_1 \cap U'_2 \neq \emptyset$, il s'agit essentiellement de vérifier que la composée du changement de cartes $\zeta_2^{\# -1} \circ \zeta_1^{\#}: \pi_{x_1}(\mathscr{F}) \times (U_1 \cap U_2) \times (U'_1 \cap U'_2) \to \to \pi_{x_2}(\mathscr{F}) \times (U_1 \cap U_2) \times (U'_1 \cap U'_2)$ et de la projection naturelle $\pi_{x_2}(\mathscr{F}) \times \times (U_1 \cap U_2) \times (U'_1 \cap U'_2) \to \pi_{x_2}(\mathscr{F})$ est localement constante par rapport à $(x, x') \in (U_1 \cap U_2) \times (U'_1 \cap U'_2)$. Ceci revient à montrer que l'application $x \to \Phi_{2x} * \Phi_{1x}^{-1}$ de $U_1 \cap U_2$ dans $\pi_{y_2 y_1}(\mathscr{F})$, avec $y_i = \alpha(\Phi_i)$, et l'application $x' \to \Phi'_{1x'} * \Phi'_{2x'}$ de $U'_1 \cap U'_2$ dans $\pi_{y'_1 y'_2}(\mathscr{F})$, où $y'_i = \beta(\Phi'_i)$, sont respectivement constantes dans tout ouvert connexe $U \subset U_1 \cap U_2$ et dans tout ouvert connexe $U' \subset U'_1 \cap U'_2$. Il suffit, évidemment, de vérifier l'une de ces assertions, soit, par exemple, qu'on a $\Phi_{2x} * \Phi_{1x}^{-1} = \Phi_{2y} * \Phi_{1y}^{-1}$, ou encore

$$(2) \qquad \Phi_{1x}^{-1} * \Phi_{1y} = \Phi_{2x}^{-1} * \Phi_{2y}$$

dans $\pi_{xy}(\mathscr{F})$ quels que soient $x, y \in U$ fixés. Or les deux membres de (2) égalent Φ_{xy}^U, compte tenu des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
\pi_{xy}(\mathscr{F}_U) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \pi_{xy}(\mathscr{F}_{U_i}) \arrow[dl] \\
& \pi_{xy}(\mathscr{F}) &
\end{tikzcd}$$

induits par $U \subset U_i \subset V$, $i=1,2$.

ii) Pour $(x_0, y_0) \in \Sigma \times \Sigma$ et $\zeta \in Z$ de la forme $(U, \tilde{x}_0, x_0, e_{(x_0, \Sigma, y_0)}, U')$, on observe en effet que la restriction de $\Sigma^\#$ à $(U \cap \Sigma) \times (U' \cap \Sigma)$ correspond par $\zeta^\# : \pi_{x_0}(\mathscr{F}) \times U \times U' \to \pi_{UU'}(\mathscr{F})$ au morphisme $(x, y) \to (\tilde{x}_0, x, y)$.

iii) Le produit fibré $\pi(\mathscr{F}) \times_V \pi(\mathscr{F})$ des submersions β et α est une sous-variété de $\pi(\mathscr{F}) \times \pi(\mathscr{F})$ et, au moyen de cartes appropriées $\zeta^\#$, avec $\zeta \in Z$, du revêtement $(\alpha, \beta) : \pi(\mathscr{F}) \to V \times V$, on observe aisément que la loi de composition $\pi(\mathscr{F}) \times_V \pi(\mathscr{F}) \to \pi(\mathscr{F})$ et l'inversion $\pi(\mathscr{F}) \to \pi(\mathscr{F})$ du groupoïde $\pi(\mathscr{F})$ sont des morphismes de variétés. Il est clair aussi que l'injection $x \to \tilde{x}$ de V dans $\pi(\mathscr{F})$ est un plongement. Donc $\pi(\mathscr{F})$ est un groupoïde de Lie galoisien.

iv) Pour tout $\theta \in \Theta$, avec $\theta = (U, \Sigma, h, \Sigma', U')$ et $\pi(\mathscr{F}_U)$, $\pi(\mathscr{F}_{U'})$ triviaux, il suffira de vérifier la commutativité de

$$\begin{tikzcd}
U \times_{\Sigma'} U' \arrow[r, "\theta^\#"] \arrow[d, "v"'] & P_\theta \arrow[d, "\eta"] \\
\pi_{x_0}(\mathscr{F}) \times U \times U' \arrow[r, "\theta_0^\#"] & \pi_{UU'}(\mathscr{F})
\end{tikzcd}$$

où v et $\theta_0 \in Z$ sont définis par $v(x, x') = (\tilde{x}_0, x, x')$, avec $x_0 \in \Sigma$, et

$$\theta_0 = (U, \tilde{x}_0, x_0, \eta(\overline{j_{x_0}(h)}), U').$$

Pour $(x, x') \in U \times_{\Sigma'} U'$, il s'agit donc de vérifier

(3) $\qquad (\eta \circ \theta^\#)(x, x') = (\theta_0^\# \circ v)(x, x').$

Or on a

$$\begin{aligned}
(\eta \circ \theta^\#)(x, x') &= \Phi^U_{xp(x)} * \eta(\overline{j_{p(x)}(h)}) * \Phi^{U'}_{p'(x')x'} \\
&= \Phi^U_{xx_0} * \Phi^U_{x_0p(x)} * \eta(\overline{j_{p(x)}(h)}) * \Phi^{U'}_{p'(x')h(x_0)} * \Phi^{U'}_{h(x_0)x'} \\
&= \Phi^U_{xx_0} * e_{(x_0, \Sigma, p(x))} * \eta(\overline{j_{p(x)}(h)}) * e_{(p'(x'), \Sigma', h(x_0))} * \Phi^{U'}_{h(x_0)x'} \text{ et} \\
(\theta_0^\# \circ v)(x, x') &= \Phi^U_{xx_0} * \eta(\overline{j_{x_0}(h)}) * \Phi^{U'}_{h(x_0)x'}.
\end{aligned}$$

Or d'après (4) de (4.1.), on a

$$\eta(\overline{j_{x_0}(h)}) * e_{(h(x_0), \Sigma', p'(x'))} = e_{(x_0, \Sigma, p(x))} * \eta(\overline{j_{p(x)}(h)})$$

dans $\pi_{x_0p'(x')}(\mathscr{F})$, ce qui entraîne (3).

v) Compte tenu de iv) et de l'immersion canonique $\mathrm{Hol}(F) \to \mathrm{Hol}(\mathscr{F})$ on observe que η_F est un foncteur de groupoïdes de Lie galoisiens. La commutativité de (1) résulte alors de la remarque de (3.2.). Il reste à montrer, pour x_0, $x \in V$ fixés, que $\chi : \pi_{x_0 x}(V) \to \pi_{x_0 x}(\mathscr{F})$ est surjective. Pour toute chaîne d'holonomie $\Gamma = (\Sigma_0, \phi_0, \ldots, \phi_{n-1}, \Sigma_n)$ avec $x_0 \in \Sigma_0$, $x \in \Sigma$, il s'agit, compte tenu de (5) de (4.1.), de montrer l'existence de $\omega \in \pi_{x_0 x}(V)$ tel que l'on ait

$$\chi(\omega) = e_{(x_0, \Sigma_0, y_0)} * \eta(\bar{\phi}_0) * e_{(z_0, \Sigma_1, y_1)} * \cdots * e_{(z_{n-2}, \Sigma_{n-1}, y_{n-1})} * \eta(\bar{\phi}_{n-1}) * e_{(z_{n-1}, \Sigma_n, x)} \tag{4}$$

avec $y_i = \alpha(\phi_i)$, $z_i = \beta(\phi_i)$. Pour $i = 0, \ldots, n$, soit δ_i l'unique élément de $\pi_{z_{i-1} y_i}(\Sigma_i)$, avec $z_{-1} = x_0$, $y_n = x$, et, pour $i = 0, \ldots, n-1$, soit $\omega_i \in \pi_{y_i z_i}(F_i)$, avec $F_i = F_{y_i}$, tel que

$$\chi_{F_i}(\omega_i) = \bar{\phi}_i. \tag{5}$$

Designons par $\bar{\delta}_i$ (resp. $\bar{\omega}_i$) l'image de δ_i (resp. ω_i) par le foncteur $\pi(\Sigma_i) \to \pi(V)$ (resp. $\pi(F_i) \to \pi(V)$) induit par l'immersion canonique de Σ_i (resp. F_i) dans V. D'après ii), on obtient

$$\chi(\bar{\delta}_i) = e_{(z_{i-1}, \Sigma_i, y_i)}. \tag{6}$$

D'autre part, la commutativité de

$$\begin{array}{ccc} \pi(F_i) & \longrightarrow & \pi(V) \\ {\scriptstyle \chi_{F_i}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \chi} \\ \mathrm{Hol}(F_i) & \xrightarrow{\eta} & \pi(\mathscr{F}) \end{array}$$

entraîne, d'après (5),

$\chi(\bar{\omega}_i) = \eta(\chi_{F_i}(\omega_i)) = \eta(\bar{\phi}_i)$. Compte tenu de (6), il est clair que l'on a (4) avec $\omega = \bar{\delta}_0 \bar{\omega}_0 \bar{\delta}_1 \cdots \bar{\delta}_{n-1} \bar{\omega}_{n-1} \bar{\delta}_n$.

4.3. D'après la proposition précédente, et compte tenu de la remarque de (3.2.), on a, pour $x_0 \in V$ fixé, une suite exacte

$$1 \to \pi_{\tilde{x}_0}(\pi_{x_0,}(\mathscr{F})) \xrightarrow{\beta_*} \pi_{x_0}(V) \xrightarrow{\chi} \pi_{x_0}(\mathscr{F}) \to 1.$$

Une évaluation du noyau de χ, c'est-à-dire du groupe de Poincaré de $\pi_{x_0,}(\mathscr{F})$ est fournie par l'énoncé suivant, où $\mathrm{Ker}_x(F_x)$, $x \in V$, désigne le noyau de l'homomorphisme $\chi : \pi_x(F_x) \to \mathrm{Hol}_x(F_x)$, les autres notations étant celles définies dans (4.2.).

PROPOSITION [11]. *Soit $\chi : \pi(V) \to \pi(\mathscr{F})$ le foncteur canonique de $\pi(\mathscr{F})$. Pour que $\chi(\omega) = \chi(\omega')$, où ω, $\omega' \in \pi_{x_0 x}(V)$, il faut et il suffit qu'il existe $x_i \in V$, $\delta_i \in \mathrm{Ker}_{x_i}(F_{x_i})$, $i = 0, \ldots, n$, avec $x_n = x$, et $\omega_i \in \pi_{x_{i-1} x_i}(V)$, $i = 1, \ldots, n$, tels que $\omega = \omega_1 \cdots \omega_n$ et $\omega' = \bar{\delta}_0 \omega_1 \bar{\delta}_1 \cdots \bar{\delta}_{n-1} \omega_n \bar{\delta}_n$.*

5. LE PLONGEMENT CANONIQUE $\pi(\mathscr{F}) \to \pi(B\mathscr{G})$

5.1. Soit Γ un groupoïde topologique. Reprenant les notations de (2.1.), on désignera par $E\Gamma_0$ (resp. $E\Gamma_1$) le sous-espace fermé $\bigcap_n p_{2n+1}^{-1}(0)$ (resp. $\bigcap_n p_{2n}^{-1}(0)$) de $E\Gamma$ formé des $[t,g]$ tels que $t_n = 0$ pour n impair, (resp. pair).

LEMME. *Soient f, f' des applications continues définies dans un espace topologique X, à valeurs dans $E\Gamma$ et vérifiant $\bar{\beta}\circ f = \bar{\beta}\circ f'$, $f(X)\subset E\Gamma_0$, $f'(X)\subset E\Gamma_1$. Alors f et f' sont homotopes.*

En effet, posant $[t(x), g(x)] = f(x)$, $[t'(x), g'(x)] = f'(x)$, on observe que l'application continue $F: X\times[0,1]\to E\Gamma$ définie par

$$F(x,s) = [((1-s)t_0(x), g_0(x)), (st_1'(x), g_1'(x')), ((1-s)t_2(x), g_2(x)), \dots]$$

est une homotopie de f à f'.

On peut alors démontrer comme suit un énoncé connu [1], mais dont la démonstration semble ne pas avoir été publiée ou, en tout cas, être peu connue.

PROPOSITION. *Soit Γ un groupoïde topologique. L'application ϱ du sous-espace U des unités de Γ dans $E\Gamma$ définie par $\varrho(x) = [(1,x),(0,x),\dots]$ est une équivalence d'homotopie.*

Puisque $\bar{\beta}: E\Gamma\to U$ est une inverse à gauche de l'application continue ϱ, il suffit de vérifier que $\varrho\circ\bar{\beta}: E\Gamma\to E\Gamma$ est homotope à $1_{E\Gamma}$. Pour tout entier $n\geq 1$, soit $\alpha_n: R\to R$ la fonction affine croissante appliquant $[1-(\frac{1}{2})^{n-1}, 1-(\frac{1}{2})^n]$ sur $[0,1]$ et soit $h_n: E\Gamma\times[1-(\frac{1}{2})^{n-1}, 1-(\frac{1}{2})^n]\to E\Gamma$ l'application continue définie par

$$h_n([t,g],s) = [(t_0,g_0),(t_1,g_1),\dots,(t_{n-1},g_{n-1}),(\alpha_n(s)t_n,g_n),$$

$$\underbrace{(0,\bar{\beta}([t,g])),\dots,(0,\bar{\beta}([t,g])),}_{n-1 \text{ fois}}$$

$$((1-\alpha_n(s))t_n,g_n),\ (0,\bar{\beta}([t,g])),\ (t_{n+1},g_{n+1}),\ (0,\bar{\beta}([t,g])),\ (t_{n+2},g_{n+2}),\dots].$$

Les applications h_n, $n\geq 1$, définies sur des fermés de

$$[0,1[\times E\Gamma = \bigcup_{n\geq 1}[1-(\tfrac{1}{2})^{n-1}, 1-(\tfrac{1}{2})^n]\times E\Gamma$$

se recollent en une application continue $h: [0,1[\times E\Gamma\to E\Gamma$. Observons maintenant que le prolongement $\bar{h}: [0,1]\times E\Gamma\to E\Gamma$ de h défini par $\bar{h}([t,g],1) = [t,g]$ est continu. Puisque $[0,1[\times E\Gamma$ est un ouvert de $[0,1]\times E\Gamma$, il suffit de vérifier la continuité de $\bar{h}$ en $([t,g],1)$ pour tout $[t,g]\in E\Gamma$. Etant donné un voisinage Ω de $[t,g]$, et qu'on peut supposer de la forme $(\bigcap_{n\in P} p_n^{-1}(I_n))\cap(\bigcap_{n\in P_0} g_n^{-1}(U_n))$, où $P\supset P_0$ est une partie finie de N, avec $P_0 = \{n\in N \mid t_n\neq 0\}$, chaque intervalle I_n, $n\in P$ (resp. $n\in P_0$), étant un voisinage ouvert de t_n dans $[0,1]$ (resp. $]0,1]$) et U_n, $n\in P_0$, étant un voisinage ouvert de g_n (cf. démonstration de la proposition de (2.2.)), il suffit d'indiquer $0<\varepsilon<1$ tel que $h(\Omega\times[1-\varepsilon,1[)\subset\Omega$. Or un tel ε existe du fait que $n>\max(P)$ entraîne $h_n(\Omega\times[1-(\frac{1}{2})^{n-1}, 1-(\frac{1}{2})^n])\subset\Omega$.

Ce qui précède montre que $1_{E\Gamma}=\bar{h}(\cdot,1)$ est homotope à $h_1(\cdot,0)$ qui prend ses valeurs dans $E\Gamma_0$ et est, par conséquent, en vertu du lemme, homotope à $h_1':[t,g]\to[(0,\bar{\beta}([t,g])),(1,\bar{\beta}([t,g])),(0,\bar{\beta}([t,g])),\ldots]$. En vertu du même lemme, h_1' est homotope à $\varrho\circ\bar{\beta}$, ce qui achève la démonstration.

5.2. Dans ce qui suit, on désignera par $\mathscr{G}$ le groupoïde topologique d'holonomie de la variété feuilletée $(V,\mathscr{F})$. Soit $\lambda: V\to B\mathscr{G}$ l'injection continue obtenue en composant $\varrho: V\to E\mathscr{G}$, définie par $\varrho(x)=[(1,\tilde{x}),(0,\tilde{x}),\ldots]$, et $q: E\mathscr{G}\to B\mathscr{G}$. Compte tenu de (4.2.), on peut énoncer:

PROPOSITION. *$\lambda_*:\pi(V)\to\pi(B\mathscr{G})$ se factorise à travers $\chi:\pi(V)\to\pi(\mathscr{F})$ en un isomorphisme de $\pi(\mathscr{F})$ avec un sous-groupoïde plein de $\pi(B\mathscr{G})$.*

Pour x_0, $x\in V$ fixés, il s'agit d'observer que $\lambda_*:\pi_{x_0x}(V)\to\pi_{\lambda(x_0)\lambda(x)}(B\mathscr{G})$ se factorise à travers la surjection $\chi:\pi_{x_0x}(V)\to\pi_{x_0x}(\mathscr{F})$ en une bijection $\pi_{x_0x}(\mathscr{F})\to\pi_{\lambda(x_0)\lambda(x)}(B\mathscr{G})$. Observons d'abord que λ_* est surjective, parce que composée de $\varrho_*:\pi_{x_0x}(V)\to\pi_{\varrho(x_0)\varrho(x)}(E\mathscr{G})$, bijective d'après (5.1.), et de $q_*:\pi_{\varrho(x_0)\varrho(x)}(E\mathscr{G})\to\pi_{\lambda(x_0)\lambda(x)}(B\mathscr{G})$, surjective d'après la proposition de (2.3.); en effet, $\mathscr{G}$ vérifie, d'après la proposition de (3.1.), les propriétés requises. Puisque $\lambda_*=q_*\circ\varrho_*$ est surjective, il n'est donc que de vérifier, pour ω, $\omega'\in\pi_{x_0x}(V)$, que l'on a

(1) $\quad \chi(\omega)=\chi(\omega').$

si et seulement si

(2) $\quad q_*(\varrho_*(\omega))=q_*(\varrho_*(\omega')).$

Avec les notations de (2.3.), observons d'abord, pour tout $\xi\in E\mathscr{G}$, que le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{G}_{x,} & \xrightarrow{\beta} & F_x \\ {\scriptstyle \xi^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ E\mathscr{G} & \xrightarrow{\bar{\beta}} & V \end{array}$$

avec $x=\bar{\beta}(\xi)$, et où j est l'immersion canonique, induit, compte tenu du corollaire de (3.3.), le carré commutatif

$$(\xi)\qquad \begin{array}{ccc} \pi_{\tilde{x}}(\mathscr{G}_{x,}) & \xrightarrow{\beta_*} & \mathrm{Ker}_x(F_x) \\ {\scriptstyle \xi_*^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_*} \\ \pi_\xi(E\mathscr{G}) & \xrightarrow{\bar{\beta}_*} & \pi_x(V) \end{array}$$

où β_* est un isomorphisme. Montrons que (2) entraîne (1). En effet, il existe alors, d'après la proposition de (2.3.), $\xi_i\in E\mathscr{G}$, $\omega_i\in\pi_{\xi_{i-1}\xi_i}(E\mathscr{G})$, $i=1,\ldots,n$, avec $\xi_0=\varrho(x_0)$, $\xi_n=\varrho(x)$, et $\delta_i\in\pi_{\bar{x}_i}(\mathscr{G}_{x_i})$, $i=0,\dots,n$, avec $x_i=\bar{\beta}(\xi_i)$, tels qu'on ait $\varrho_*(\omega)=\omega_1\cdots\omega_n, \varrho_*(\omega')=\xi^{\#}_{0*}(\delta_0)\omega_1\xi^{\#}_{1*}(\delta_1)\cdots\omega_n\xi^{\#}_{n*}(\delta_n)$. Compte tenu de $\bar{\beta}\circ\varrho=1_V$ et de la commutativité des (ξ_i), $i=0,\dots,n$, il vient alors

$$\omega=\bar{\beta}_*(\varrho_*(\omega))=\bar{\beta}_*(\omega_1)\cdots\bar{\beta}_*(\omega_n),$$

$$\omega'=\bar{\beta}_*(\varrho_*(\omega'))=j_*(\beta_*(\delta_0))\bar{\beta}_*(\omega_1)j_*(\beta_*(\delta_1))\cdots\bar{\beta}_*(\omega_n)j_*(\beta_*(\delta_n))$$

et donc (1), compte tenu de la proposition de (4.3.). Réciproquement (1) entraîne, d'après la même proposition, l'existence de $x_i\in V$, $\omega_i\in\pi_{x_{i-1}x_i}(V)$, $i=1,\dots,n$, avec $x_n=x$, et $\delta_i\in\mathrm{Ker}_{x_i}(F_{x_i})$ tels que $\omega=\omega_1\cdots\omega_n$ et

$$\omega'=j_*(\delta_0)\omega_1j_*(\delta_1)\cdots\omega_nj_*(\delta_n).$$

D'où

$$\varrho_*(\omega)=\varrho_*(\omega_1)\cdots\varrho_*(\omega_n) \text{ et}$$

$$\varrho_*(\omega')=\varrho_*(j_*(\delta_0))\varrho_*(\omega_1)\varrho_*(j_*(\delta_1))\cdots\varrho_*(\omega_n)\varrho_*(j_*(\delta_n)).$$

On obtient alors (2) d'après la proposition de (2.3.), compte tenu de ce que, dans chaque carré commutatif $(\varrho(x_i))$, $i=1,\dots,n$, $\bar{\beta}_*$ est, d'après (5.1.), un isomorphisme tel que $\bar{\beta}_*^{-1}=\varrho_*$, ce qui entraîne $\varrho_*(j_*(\delta_i))=\varrho(x_i)^{\#}_*(\beta_*^{-1}(\delta_i))$.

Ce qui précède démontre, tout en lui donnant un sens précis, l'affirmation suivante de van Est [8].

COROLLAIRE. *Le groupe fondamental de $\mathscr{F}$ est isomorphe au groupe de Poincaré de $B\mathscr{G}$.*

5.3. Pour $x_0\in V$ fixé, soit $\beta^{-1}(\mathscr{F})$ le feuilletage image réciproque de $\mathscr{F}$ par $\beta:\pi_{x_0,}(\mathscr{F})\to V$ sur la variété $\pi_{x_0,}(\mathscr{F})$, connexe d'après (4.2.). On sait [9] que $\beta:\pi_{x_0,}(\mathscr{F})\to V$ induit un revêtement de chaque feuille F de $\beta^{-1}(\mathscr{F})$ sur une feuille de $\mathscr{F}$ et un foncteur fidèle $\tilde{\beta}:\mathrm{Hol}(\beta^{-1}(\mathscr{F}))\to\mathrm{Hol}(\mathscr{F})$. La proposition (6.2.) de [11] admet alors la formulation suivante:

PROPOSITION. *Soit $(V,\mathscr{F})$ une variété feuilletée et soit $x_0\in V$ fixé.*

i) *Le groupe fondamental du feuilletage $\beta^{-1}(\mathscr{F})$, image réciproque de $\mathscr{F}$ par $\beta:\pi_{x_0,}(\mathscr{F})\to V$, est trivial.*

ii) *Quels que soient la feuille F de $\beta^{-1}(\mathscr{F})$ et $\Phi\in F$, la suite*

$$1\to\mathrm{Hol}_\Phi(F)\xrightarrow{\tilde{\beta}}\mathrm{Hol}_{\beta(\Phi)}(\beta(F))\xrightarrow{\eta}\pi_{\beta(\Phi)}(\mathscr{F})$$

est exacte.

La première partie de cet énoncé exprime que le schéma de variété associé à $\beta^{-1}(\mathscr{F})$ est un revêtement universel, au sens de van Est [8], de celui de $\mathscr{F}$. La seconde partie exprime que $\eta_{F'}:\mathrm{Hol}(F')\to\pi(\mathscr{F})$, où F' est une feuille de $\mathscr{F}$, a pour noyau l'holonomie d'une feuille quelconque de $\beta^{-1}(\mathscr{F})$ au dessus de F'. Compte tenu du corollaire de (5.2.), il vient aussi:

COROLLAIRE. *Le classifiant $B\mathscr{G}_0$ du groupoïde d'holonomie $\mathscr{G}_0$ de* $(\pi_{x_0}, (\mathscr{F}), \beta^{-1}(\mathscr{F}))$ est simplement connexe.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. Buffet, J.P. et J.C. Lor – Une construction d'un universel pour une classe assez large de Γ-structures. C.R. Acad. Sc. Paris, 270, série **A**, 1970, 640–642.
2. Connes, A. – A survey of Foliations and Operator Algebras. I.H.E.S., 1981.
3. Ehresmann, C. – Structures feuilletées. Proc. of the 5th Canad. Math. Cong., 1961: Oeuvres complètes, **II**. 2., 563–626.
4. Haefliger, A. – Groupoïdes d'holonomie et classifiants. Astérisque, n° **116**, 1984.
5. Pradines, J. – Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiables. C.R. Acad. Sc. Paris, 263, série **A**, 1966, 907–910.
6. Pradines, J. – Feuilletages, holonomie et graphes locaux. C.R. Acad. Sc. Paris, 298, série **I**, 1984, 297–300.
7. Pradines, J. – How to define the differentiable graph of a singular foliation. Cahiers de Top. et Géométrie Diff., Vol. **XXVI**, 4 (1985), 339–380.
8. Est, W. van – Rapport sur les S-atlas. Astérisque n° 116, 1984.
9. Ver Eecke, P. – Introduction à la théorie des variétés feuilletées. Esquisses mathématiques, 31, Amiens, 1982.
10. Ver Eecke, P. – Sur le groupe fondamental d'un feuilletage. C.R. Acad. Sc. Paris, 300, série **I**, 1985, 55–58.
11. Ver Eecke, P. – Sur le groupe fondamental d'un feuilletage. Cahiers de Top. et Géométrie Diff., Vol. **XXV**, 4 (1984), 381–428.
12. Ver Eecke, P. – Sur le classifiant du groupoïde d'holonomie d'un feuilletage. C.R. Acad. Sc. Paris, 300, série **I**, 1985, 639–642.
13. Winkelnkemper, H. – The graph of a foliation. Ann. Glob. Analysis and Geometry, vol. **1**, n° 3, 1983, 51–75.
14. Zisman, M. – Topologie algébrique élémentaire. Armand Colin, Paris, 1972.